Вдовина Э.В.

Об иллюстрационном (компьютерном) сопровождении курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

УрГу

Екатеринбург

Vdovina E.V.

To a question on illustrative support of a rate " The Ordinary differential equations ".

- **Для лучшего усвоения курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения » имеет смысл сопровождать его чтение иллюстрационным приложением, тем более, что содержание курса открывает для этого огромные возможности.**
- **К темами, которые наглядно иллюстрируются, можно отнести следующие:**
- **<u>I. Для уравнений первого порядка:</u>**
- **1.Построение интегральных кривых по полю направлений.**
- **2.Геометрические свойства решений дифференциальных уравнений.**
- **3.Теорема существования и единственности решения задачи Коши.**
- **4.Проблемы продолжаемости решений.**
- **5.Поведение интегральных кривых в окрестности границы области существования решений.**
- **<u>II. Для систем дифференциальных уравнений:</u>**
- **1.Фазовые портреты на плоскости и в пространстве.**
- **2.Вопросы устойчивости решений.**

Для уравнения $x\frac{dy}{dx}=2y$ семейство интегральных кривых построим по полю направлений.

K	α	Изоклины
	-60°	
-1; $-\sqrt{3}$	-45°	y=-x/2; $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-30°	$y=-\frac{\sqrt{3}}{6}x$
0	0°	y=0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	30°	$y=\frac{\sqrt{3}}{6}x$
1	45°	y=x/2
	60°	
∞; $\sqrt{3}$	90°	x=0; $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

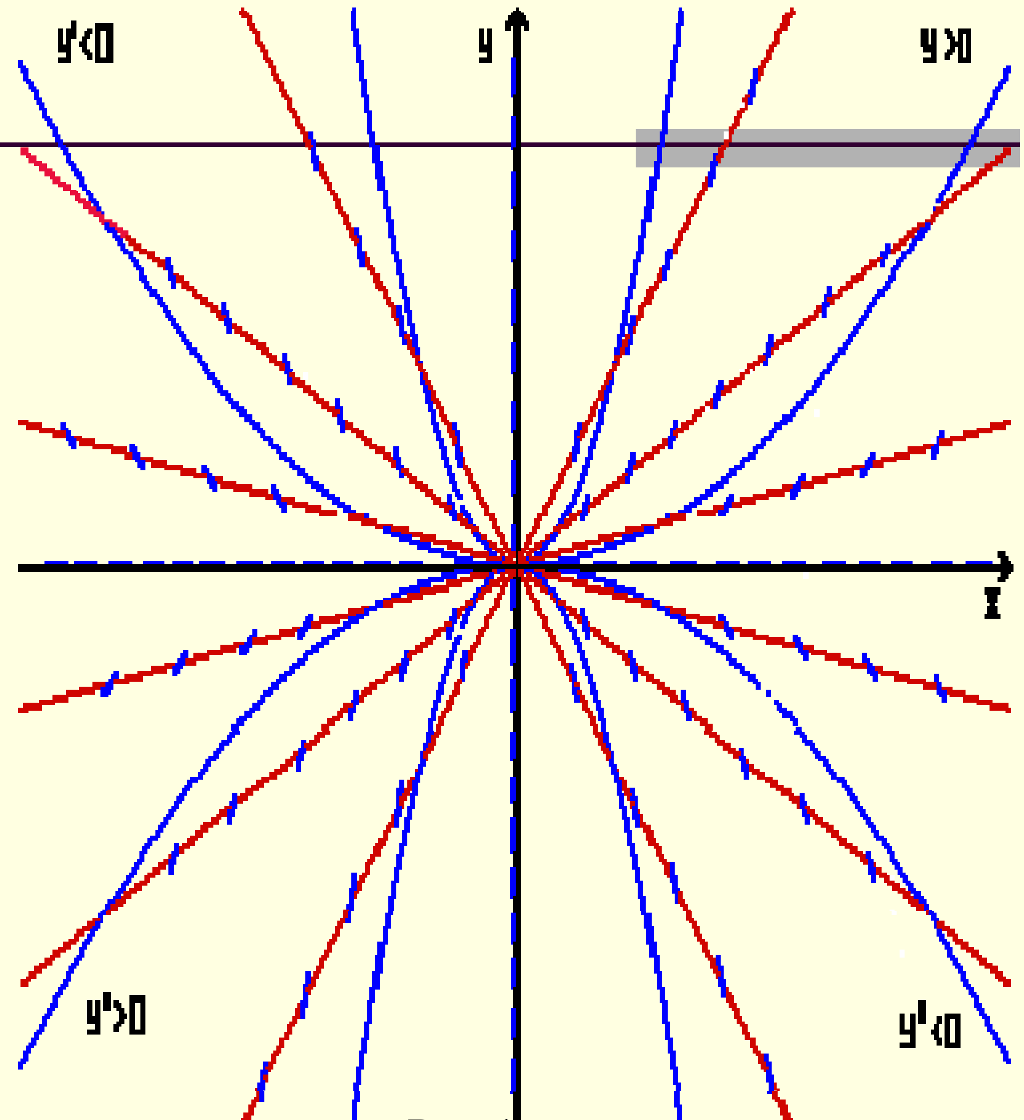


Рис.1.

- Уравнение $y' = f(y)$ (1)
- является уравнением с разделяющимися переменными.
- Соотношение $x = C + \int dy / f(y)$ (2)
- определяет его общий интеграл.
- С точки зрения геометрии (2) задаёт семейство интегральных кривых, которое может быть получено из одной интегральной кривой, например,
- $y = \int dy / f(y)$, её параллельным сдвигом на отрезок С вдоль оси Ох.
- На рис.2 изображено семейство интегральных кривых
- $x = -10\cos y -$ $\quad$ $+C$ уравнения $x' = 10\sin y - 2y$.
-

y^2

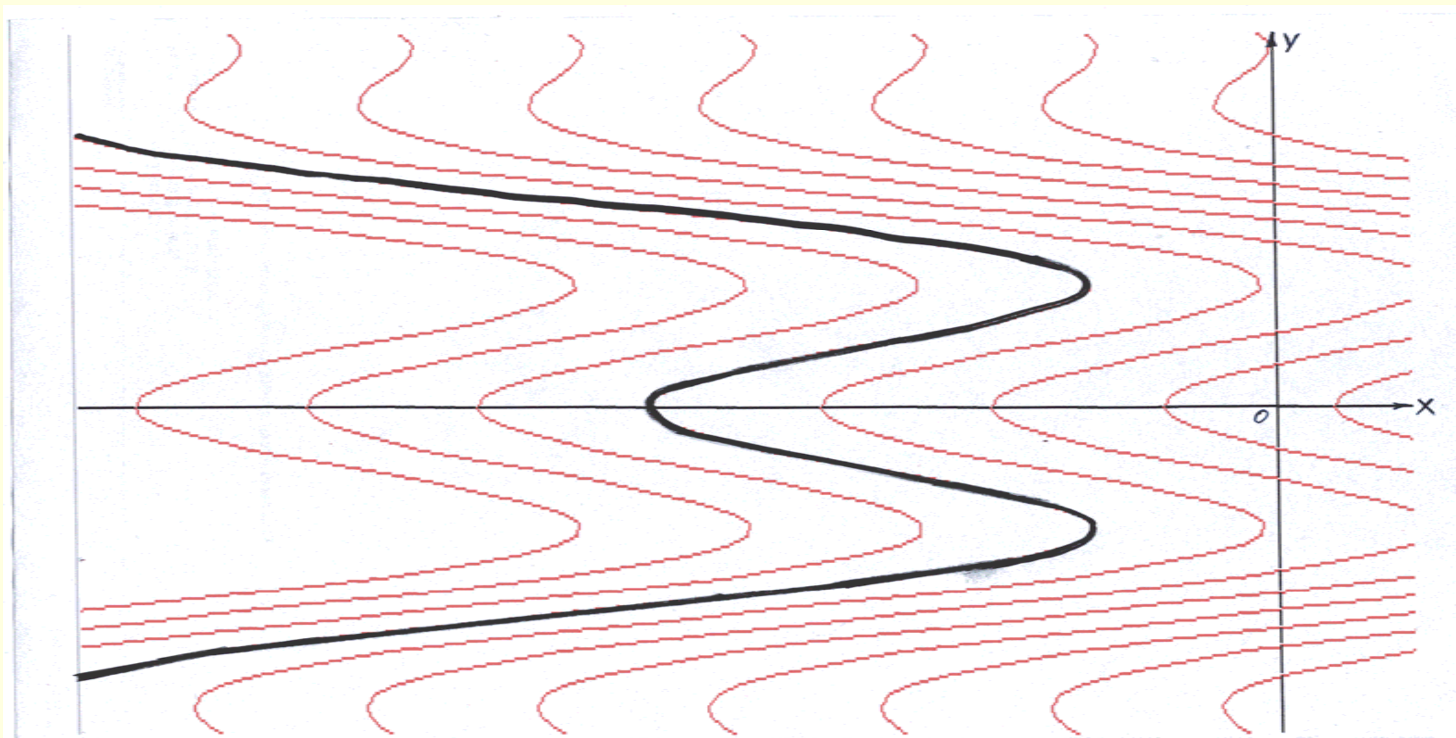


Рис.2

- **При работе с уравнениями 1-го порядка удобно использовать стандартный пакет ODE – Ordinary Differential Equations.**

(Московский энергетический институт).

Пакет предоставляет большие возможности: можно работать

- **с уравнениями от 1-го до 6-го порядка, а также с системами**
- **от 2-го до 6-го порядка, как автономными, так и неавтономными. Можно строить интегральные кривые, поле направлений, фазовые портреты, проекции на различные плоскости.**
- **При работе с системами были составлены специальные программы: для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами (ЛОПК) 2-го порядка, зависящими от параметра с построением фазовых портретов и репроектированием в 3-хмерное пространство;**
- **для ЛОПК 2-го и 3-го порядков с полной классификацией разновидностей фазовых портретов и их построением;**

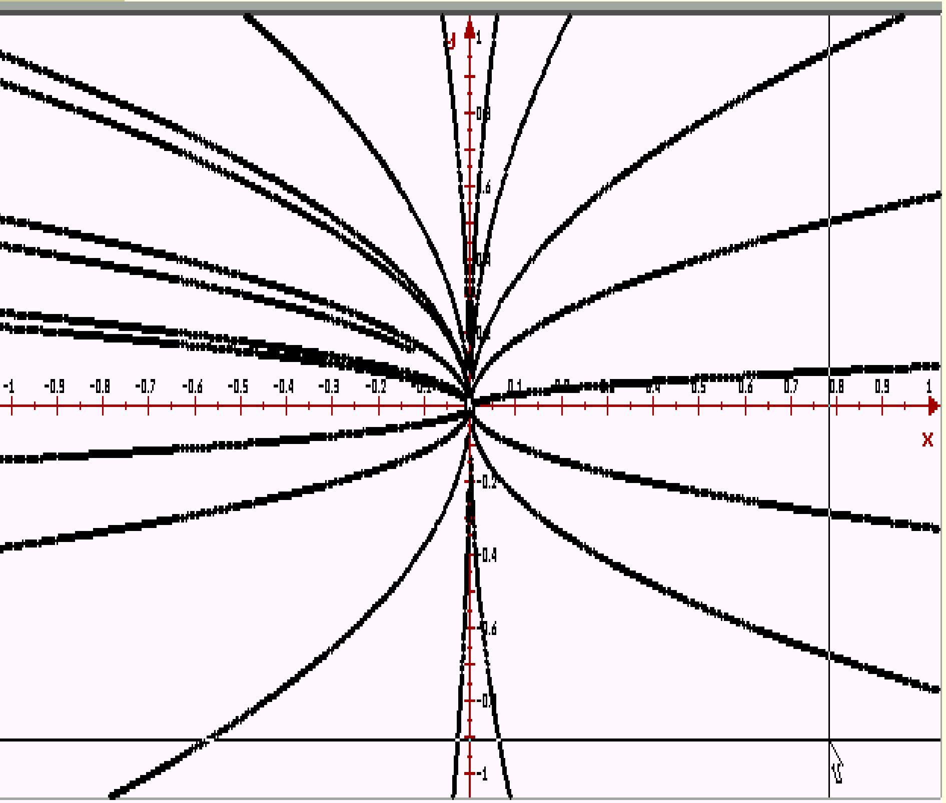
для иллюстрации понятий устойчивости и др.

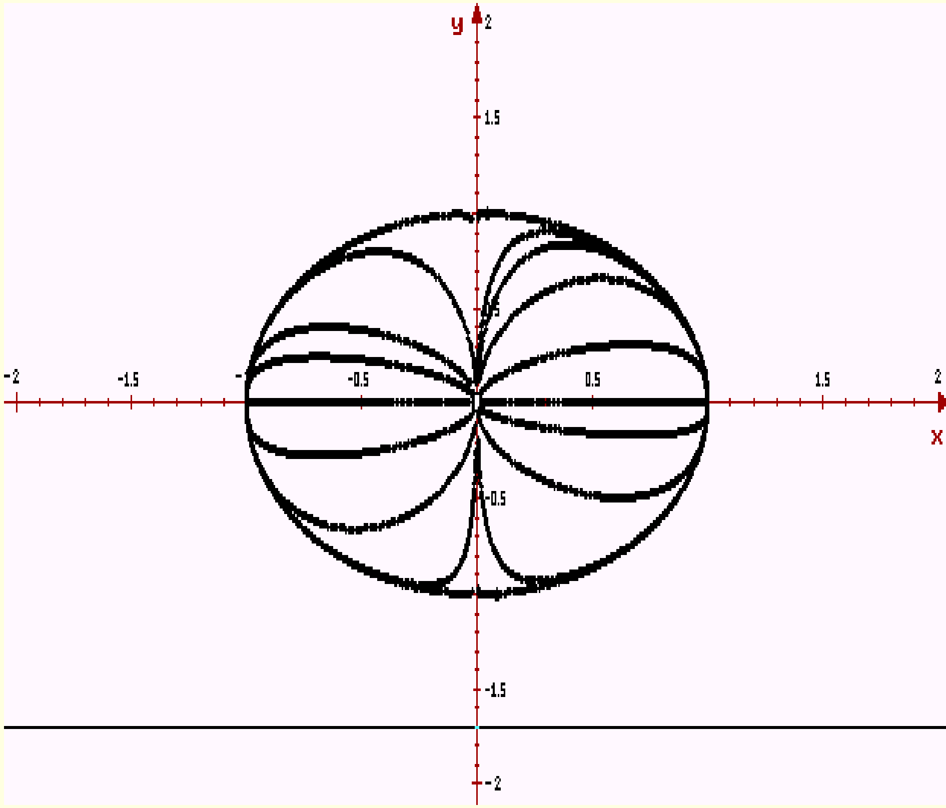
Пусть (0,0)- для системы неустойчивый узел,

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0 x + a_1 y, \\ \dot{y} = b_0 x + b_1 y \end{cases}$$

имеем на круге Пуанкаре 4 положения равновесия:

2 устойчивых узла и 2 седла.

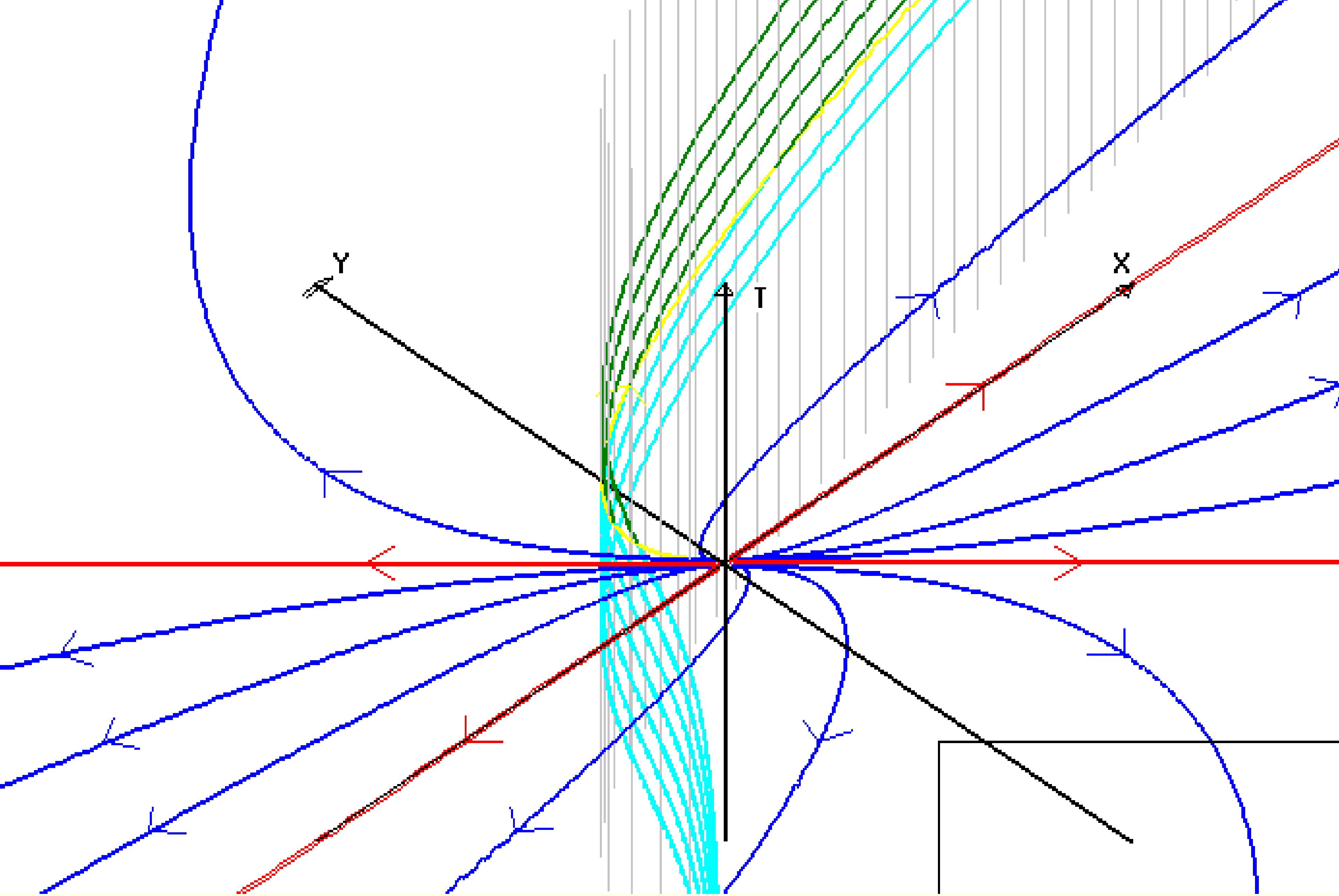




На плоскости

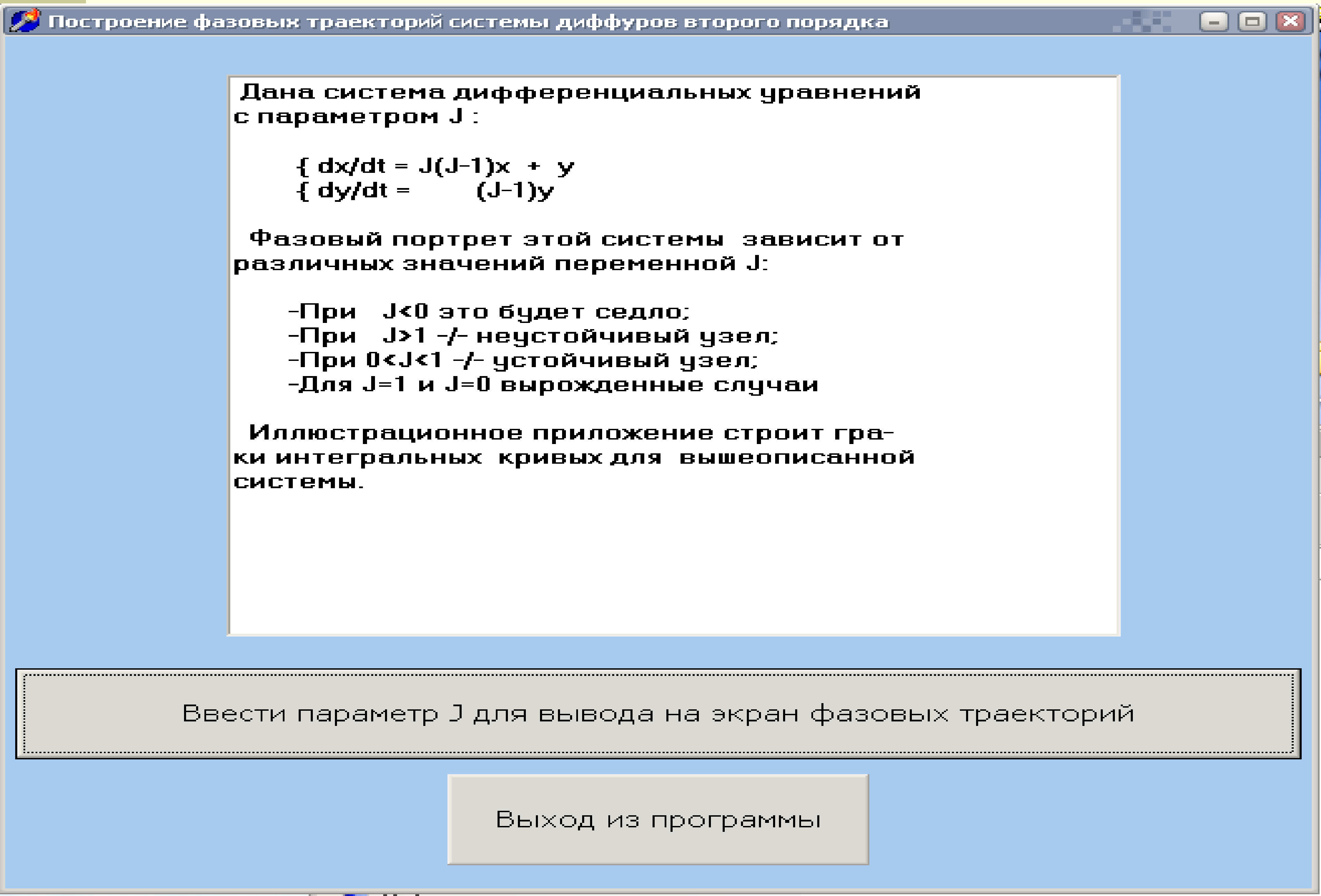
В круге Пуанкаре

- **С использованием машинной графики переход от фазового портрета к семейству интегральных кривых можно сделать весьма наглядным. Если фазовый портрет для автономной системы II порядка может быть получен путем проекти-рования семейства интегральных кривых вдоль оси 0t на фазовую плоскость x0y, то для перехода от фазового портрета к семейству интегральных кривых можно использовать обратный процесс - процесс репроектирования.**
- **В трехмерном пространстве строится цилиндр, в котором за направляющую берется фазовая траектория, а в качестве образующих рассматриваются прямые, параллельные оси 0t. Сами же интегральные кривые, лежащие на цилиндре, строятся по фазовой траектории с учетом характера устойчи-вости положения равновесия, к которому она примыкает.**



Репроекция неустойчивого узла.

Для иллюстрации этого процесса созданы специальные программы. Вот одна из них.



Построение фазовых траекторий системы диффуров второго порядка

Система дифференциальных уравнений
(параметр J=5)

{ dx/dt = 20x + y
{ dy/dt = 4y

Корни характеристического уравнения

q1 = 20 q2 = 4

Собственные вектора

X1 = (1,0) X2 = (1,-16)

Фазовые траектории образуют

неустойчивый узел

Показать график

Отмена

Выбор типа интегральной кривой

Интегральные кривые определяются двумя произвольными постоянными

следующим образом :

x = c1*exp(h1*t) + c2*exp(h2*t)

y = c2*(hy)*exp(h2*t)

возможны несколько случаев

Return

Выберите кривую

- C1 = 0 C2 > 0
- C1 = 0 C2 < 0
- C2 = 0 C1 > 0
- C2 = 0 C1 < 0
- C1 > 0 C2 < 0
- C1 < 0 C2 > 0
- C1 > 0 C2 > 0
- C1 < 0 C2 < 0

Определение устойчивости по Ляпунову произвольного решения системы дифференциальных уравнений y' = f (t, y)

Решение $y = \varphi(t)$ системы $\dot{y} = f(t, y)$ называется

устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0:$

$\forall y(t) \neq \varphi(t): \left|y(t_0) - \varphi(t_0)\right| < \delta \Rightarrow \left|y(t) - \varphi(t)\right| < \varepsilon \ \ \forall t > t_0.$