Математическое моделирование растекания жидкости по поверхности мыльного пузыря.

Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Складчиков С.А.

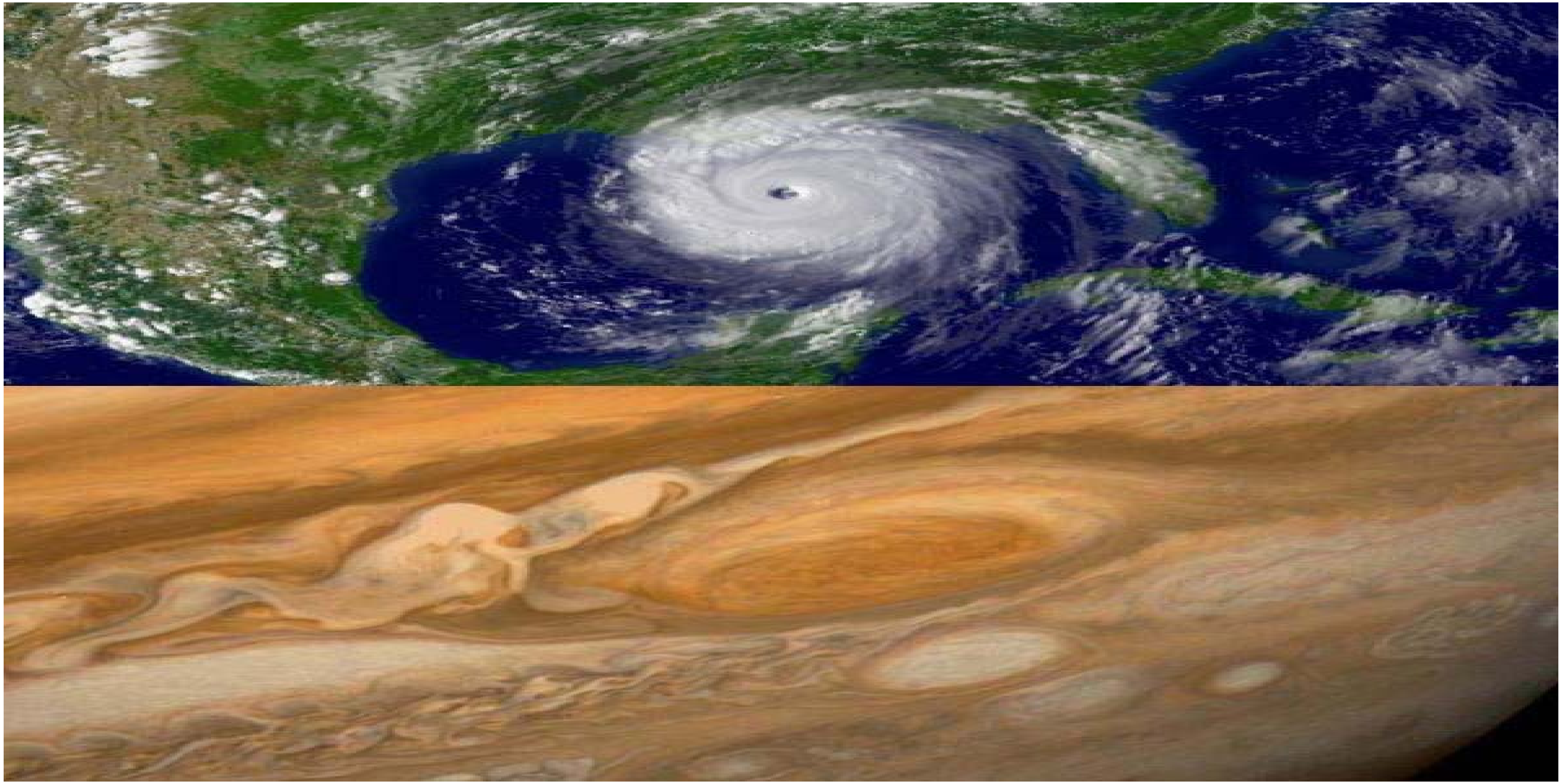


Рис. 1. Примеры проявления двумерной турбулентности в планетарном масштабе. *Вверху*: снимок урагана Катрина - одного из наиболее разрушительных ураганов в истории США, сделанный со спутника 29 августа 2005 года. *Внизу*: снимок Большого красного пятна - атмосферного образования на Юпитере, наблюдаемого уже почти 350 лет, - сделанный Вояджером-1 в 1979 году; см. также видеоролик атмосферных вихрей в районе Большого красного пятна, составленный из 66 снимков (по одному в юпитерианский день). Изображения с сайтов web.mit.edu и ru.wikipedia.org

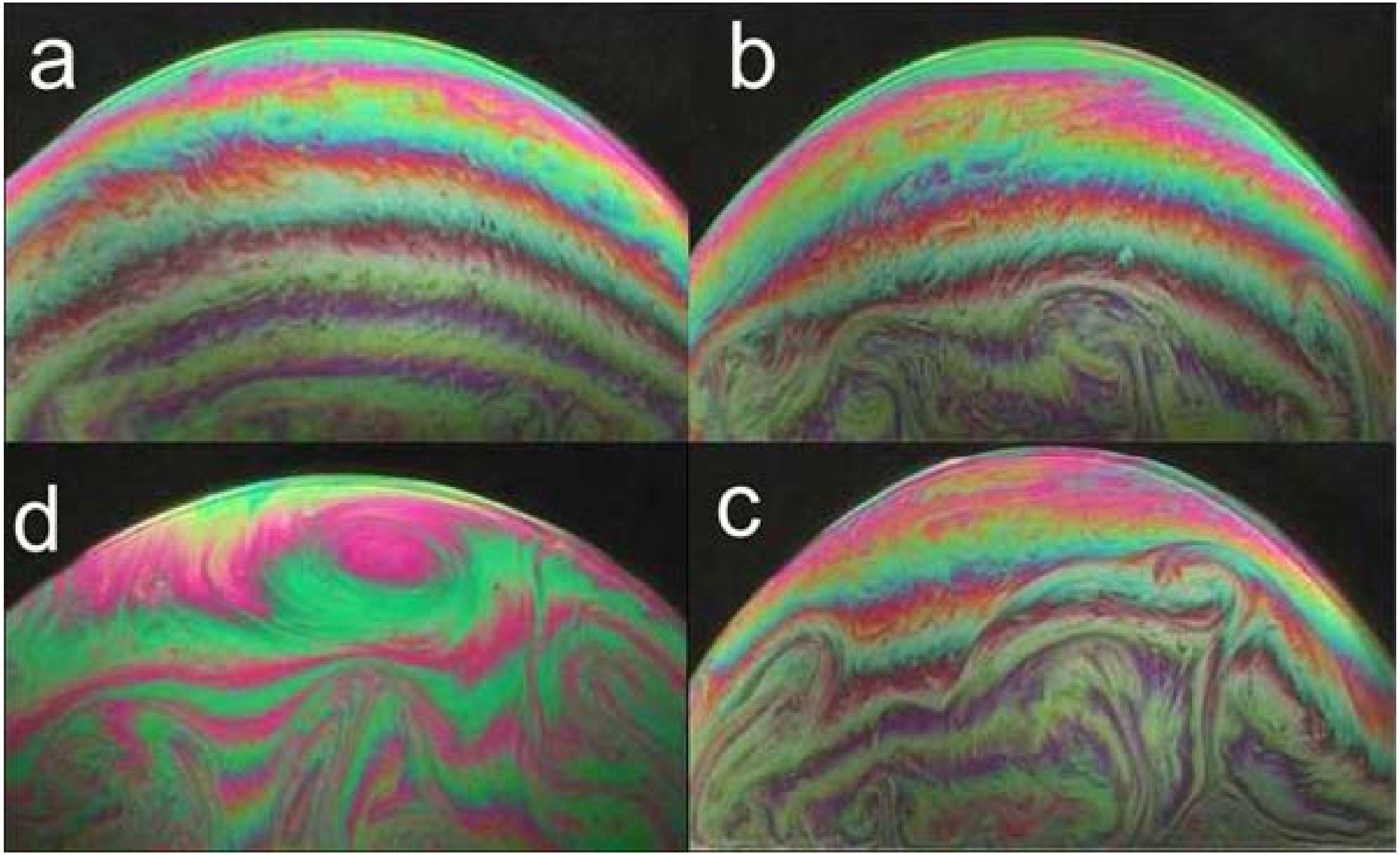


Рис. 2. Изображения пузырей при различных температурных градиентах. Разность температур ΔT увеличивается от рис. a к c и равно 9, 17 и 31°C соответственно. На рис. d: возникновение вихря при ΔT = 45°C. Рис. из обсуждаемой статьи в *Phys. Rev. Lett.*

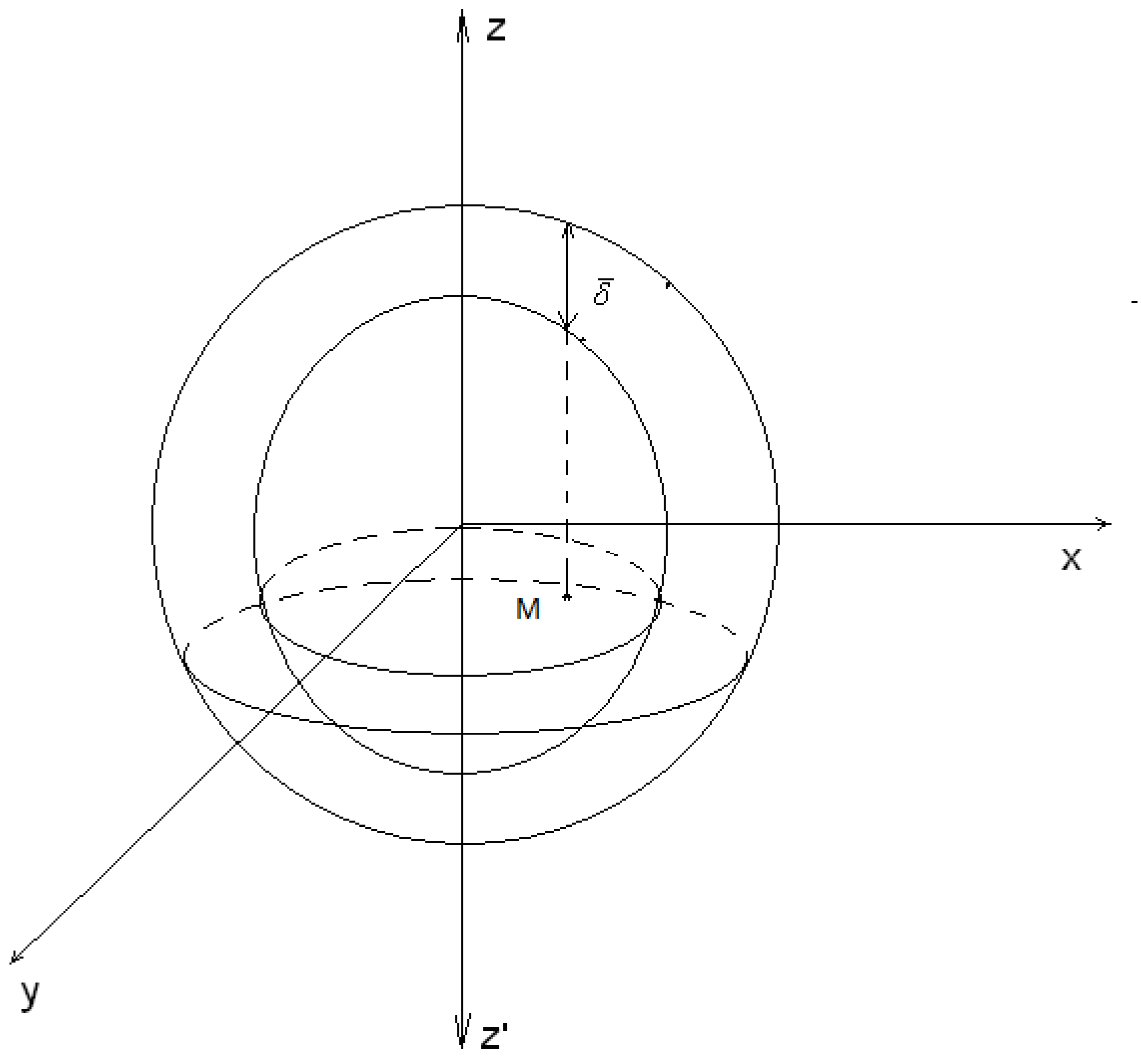


Рис.3 Схематическое изображение мыльного пузыря.

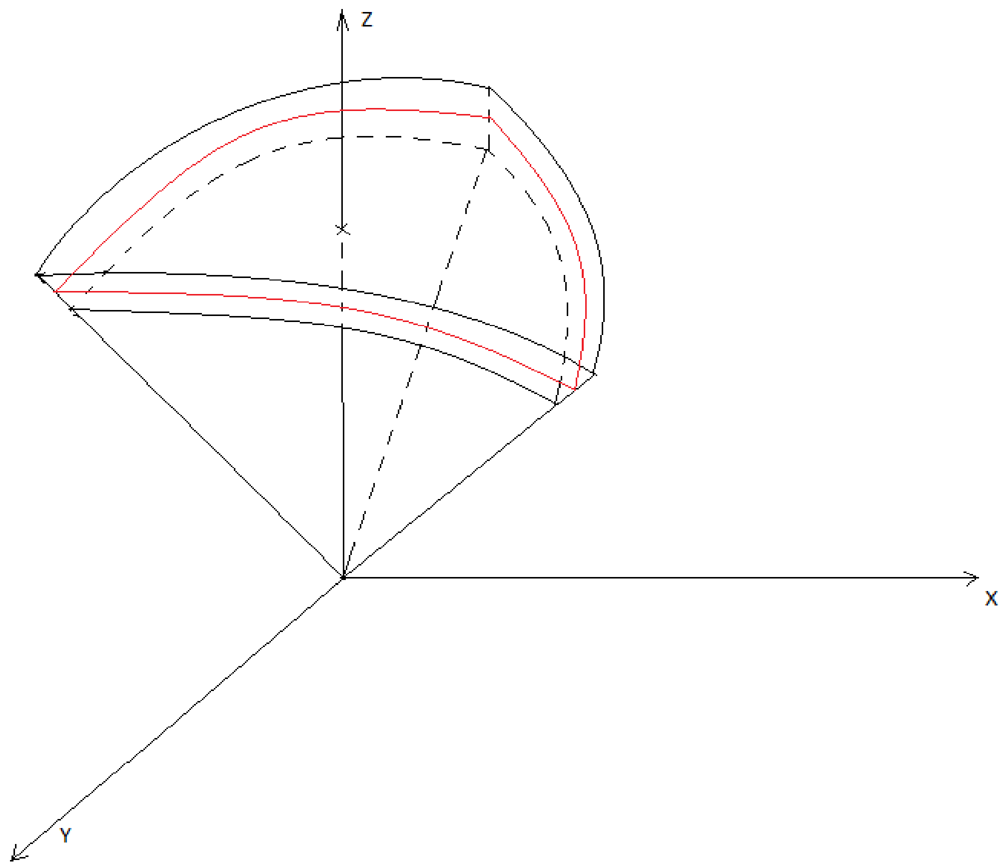


Рис.4. Средний слой в расчетной области.

$$\frac{\partial \overline{\rho\delta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho u\delta}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{\rho v\delta}}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \rho\overline{u\delta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{u}^{2}\,\overline{\delta}}{\partial x}+\frac{\partial \rho\overline{uv}\,\overline{\delta}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(\overline{\delta}-\delta(t_0))(\overline{\rho}g-f_z)-p(t_0)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)-g\,\overline{\rho\delta}\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)+\overline{F}_{пов.нат.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho v\delta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho uv\delta}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{\rho v}^{2}\,\overline{\delta}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}(\delta-\delta(t_0))(\overline{\rho}g-f_z)-p(t_0)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\right)-g\,\overline{\rho\delta}\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)+\overline{F}_{пов.нат.}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho w\delta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho uw\delta}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{\rho vw\delta}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}\right)+\overline{F}_{пов.нат.}$$

Для нижней части сферы ось Z’ направлена вниз.

$$\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{\delta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{u}\,\overline{\delta}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{\delta}}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \rho\overline{u}\,\overline{\delta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{u}^{2}\,\overline{\delta}}{\partial x}+\frac{\partial \rho\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{\delta}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2}(\overline{\delta}-\delta(t_0))(-\overline{\rho}g)-p(t_0)\Big)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\Big)+g\,\overline{\rho}\,\overline{\delta}\Big(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\Big)+\overline{F}_{пов.нат.}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{\delta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{u}\,\overline{v}\,\overline{\delta}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{v}^{2}\,\overline{\delta}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{2}(\delta-\delta(t_0))(-\overline{\rho}g)-p(t_0)\Big)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\Big)+g\,\overline{\rho}\,\overline{\delta}\Big(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\Big)+\overline{F}_{пов.нат.}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{w}\,\overline{\delta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{u}\,\overline{w}\,\overline{\delta}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{v}\,\overline{w}\,\overline{\delta}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}\Big)+\overline{F}_{пов.нат.}$$

- $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ - осредненные скорости на сфере по длине, ширине и высоте
- ρ - плотность среды
- g - ускорение свободного падения
- $\overline{\delta}$ - толщина оболочки
- R - радиус сферы
- $\overline{P}$ - плотность давления
- μ - турбулентная вязкость

В предположении осевой симметрии получим упрощенную одномерную систему для расчета движения жидкости по поверхности мыльного пузыря. Формулу для расчета силы поверхностного натяжения возьмем из теории гравитационных волн на мелкой воде.

$$\frac{\partial \overline{\rho\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u \delta}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{\rho u \delta}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\overline{u}^2\overline{\delta}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}(\overline{\delta} - \delta(t_0))(\pm\overline{\rho}g) - p(t_0)\right) + \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial r}\right) \mp g\overline{\rho\delta}\left(\frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right) \pm \frac{1}{2}\delta\sqrt{\frac{\delta}{g}}\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Заметим, что силу поверхностного натяжения мыльного пузыря можно описать и классическим образом.

$$\frac{\partial \overline{\rho\delta}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u \delta}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{\rho u \delta}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\overline{u}^2\overline{\delta}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}(\overline{\delta} - \delta(t_0))(\pm\overline{\rho}g) - p(t_0)\right) + \ldots\ldots\ldots(4)$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial r}\right) \mp g\overline{\rho\delta}\left(\frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right) \pm \frac{\gamma\delta\rho}{2(R+\delta)}$$

$начальные\ условия:$

$$u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0, \rho = const, \delta - задано, P = P_{атмосферы}, t = 0, \gamma = 35 мг/см.$$

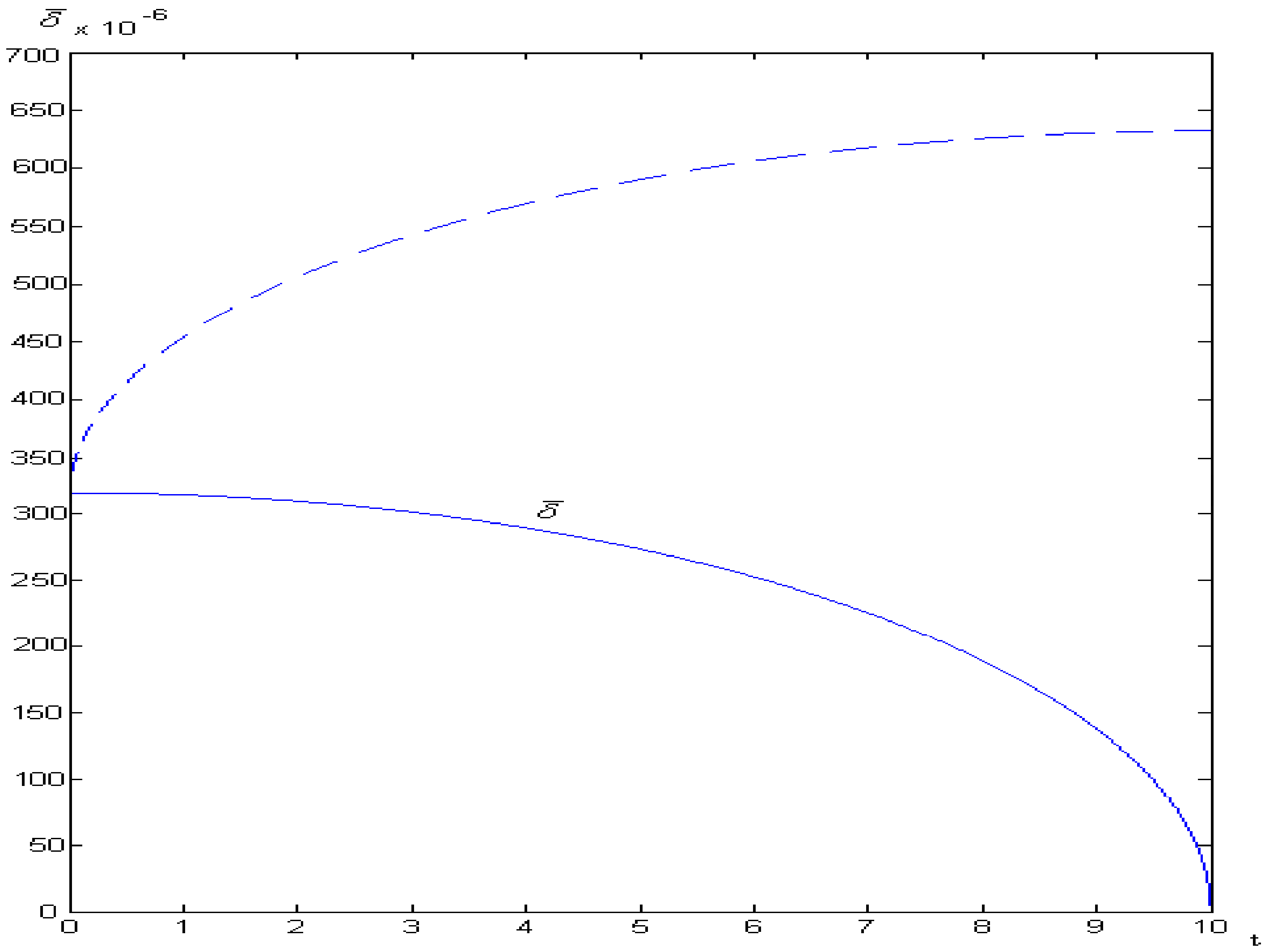
$условие\ свободной\ границы:$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$$

$$\vec{n} = \vec{r}$$

$для\ окружности:$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$



При

$$\overline{\delta} = 1\times10^{-6}$$

метра мыльный пузырь лопнет.

Рис.2

График изменения толщины оболочки мыльного пузыря в зависимости от времени для верхней части показан сплошной линией, для нижней части- пунктирной линией.

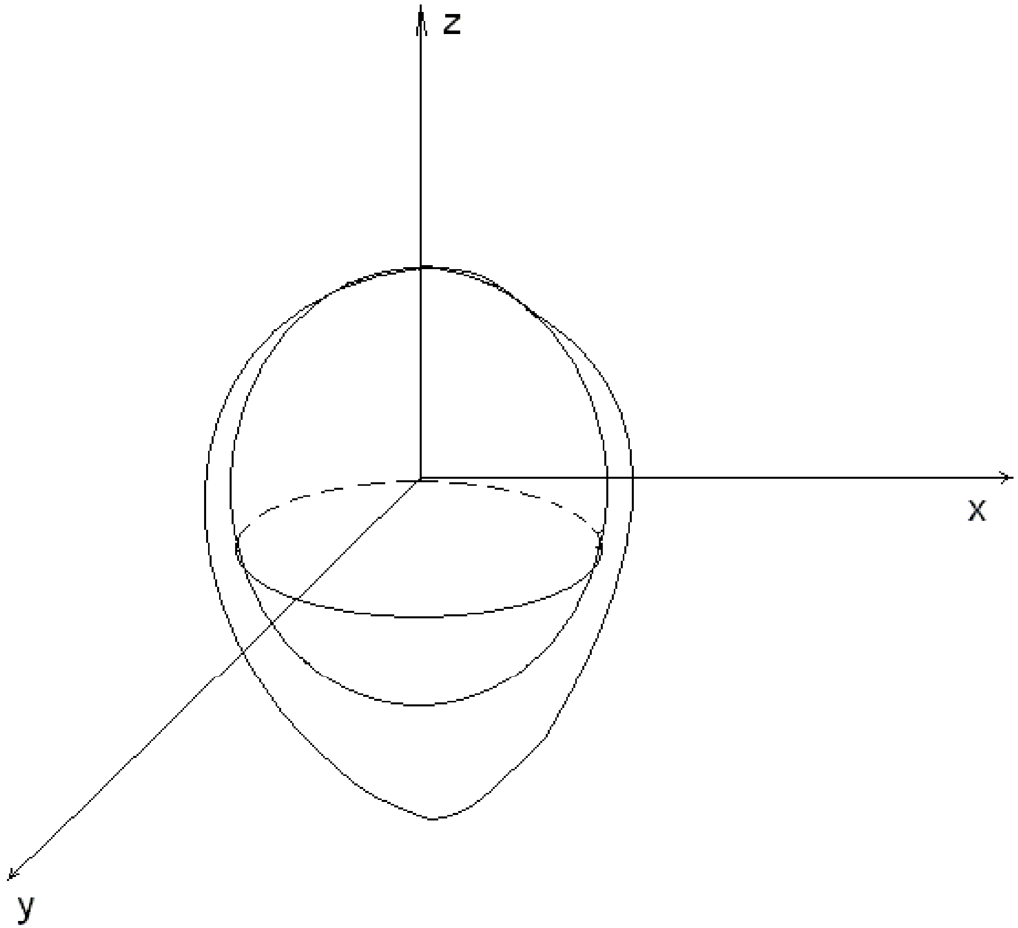


Рис. 5
Мыльный пузырь перед разрывом

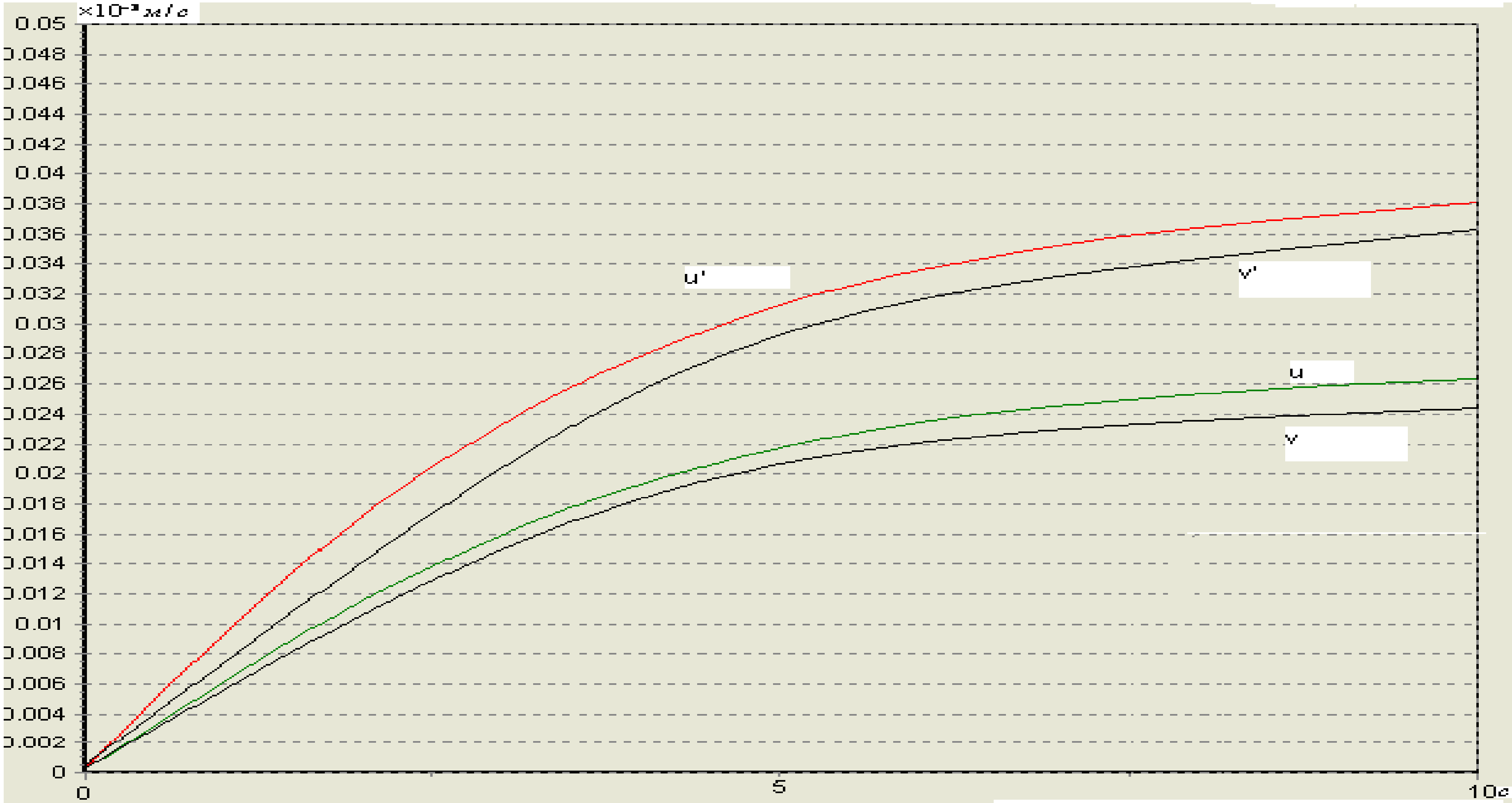


Рис. 6 U- Скорость движения вещества в точке А без закрутки с силой поверхностного натяжения из теории гравитационных волн на мелкой воде, U'- Скорость движения вещества в точке А после закрутки с некоторой скоростью Сила поверхностного натяжения из теории гравитационных волн на мелкой воде. V-Скорость движения вещества в точке А без закрутки с классической силой поверхностного натяжения, V'- Скорость движения вещества в точке А после закрутки с некоторой скоростью

$$\frac{\partial\overline{\rho}\overline{\delta}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\rho}\overline{u}\overline{\delta}}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial\rho\overline{u}\overline{\delta}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\rho}\overline{u}^{2}\overline{\delta}}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}(\overline{\delta}-\delta(t_0))(\pm\overline{\rho}g)-p(t_0)\right)+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\right)\mp g\overline{\rho}\overline{\delta}\left(\frac{-r}{\sqrt{R^2-r^2}}\right)\pm\frac{\gamma\delta\rho}{2(R+\delta)}$$

$$\frac{\partial\rho h\overline{\delta}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\rho}\overline{u}h\overline{\delta}}{\partial r}=Q_h+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}(\overline{\delta}-\delta(t_0))(\pm\overline{\rho}g)-p(t_0)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho\delta\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\right)\mp g\overline{\rho}\overline{\delta}\left(\frac{-r}{\sqrt{R^2-r^2}}\right)\pm\frac{\gamma\delta\rho}{2(R+\delta)}$$

Где $h=Tc_p$ - энтальпия вещества.

Q_h -тепловой источник.

Рис.7 U1- скорость без нагревания в некоторой точке. U2- скорость в той же точке с нагреванием.

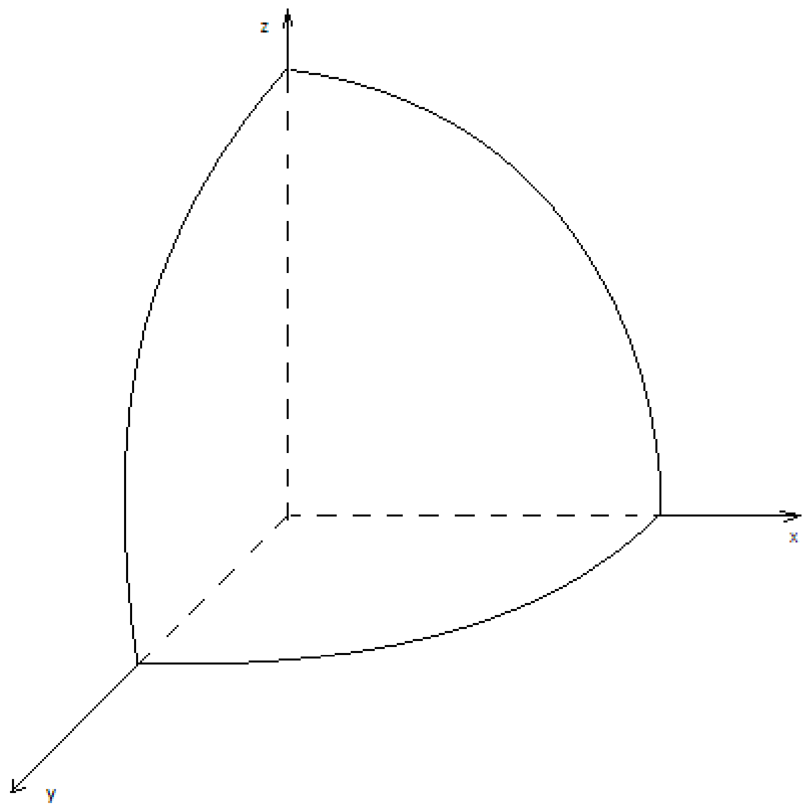


Рис.8 Расчетная область.

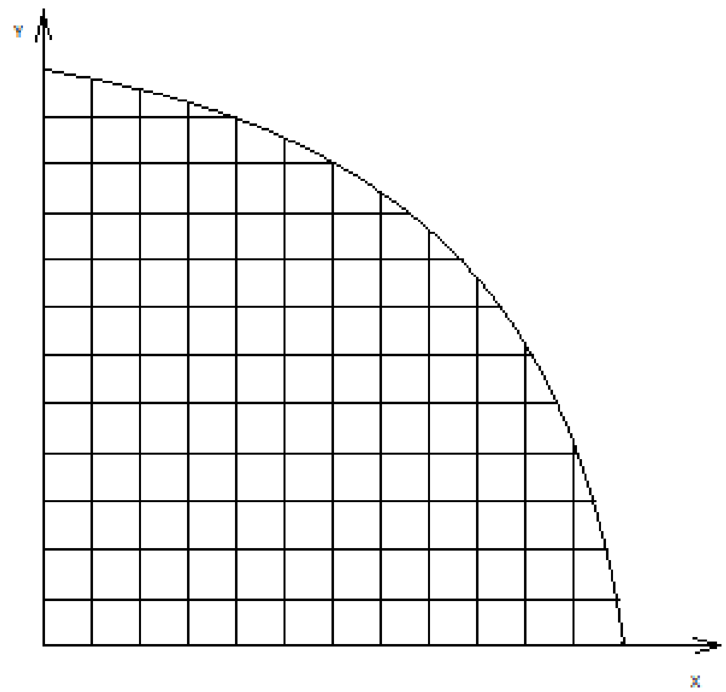


Рис.9. Расчетная сетка.

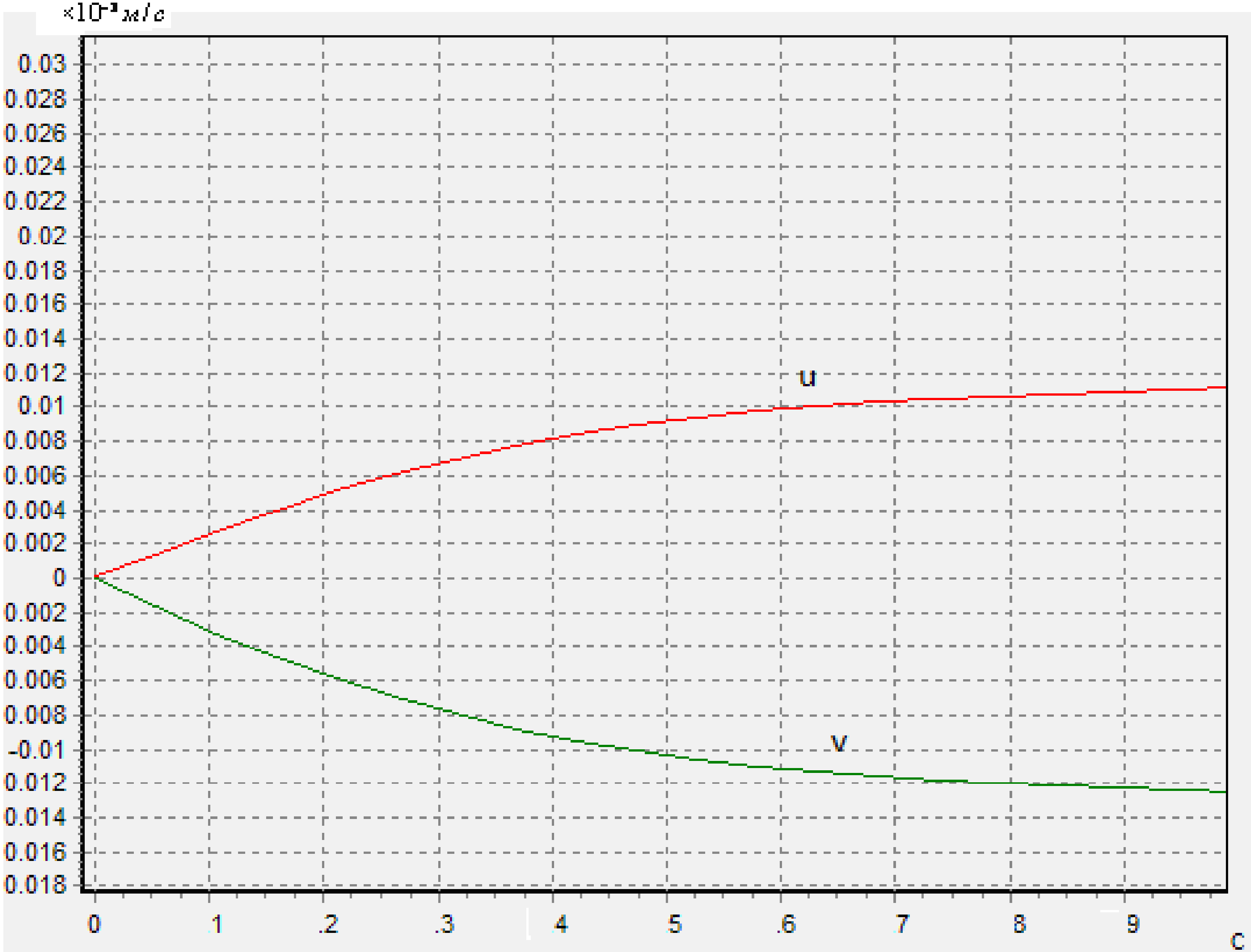


Рис.10. Изменение скоростей u и v в некоторой точке (x,y).

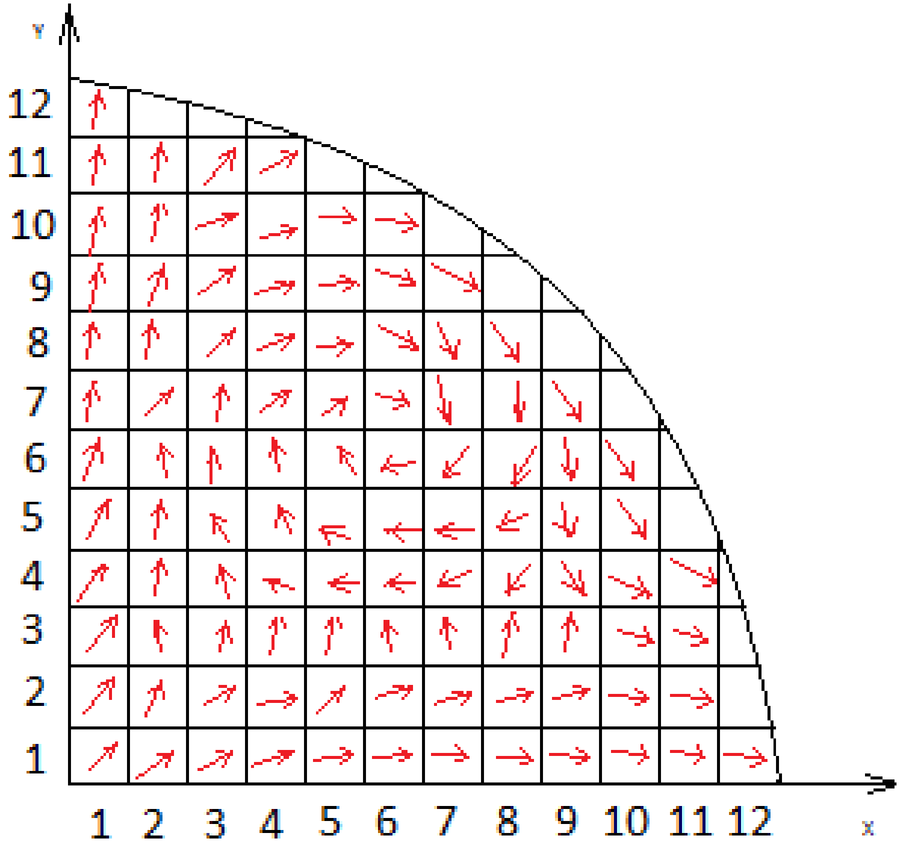


Рис. 11. Поле скоростей для верхней части сферы. ΔT = 45°C

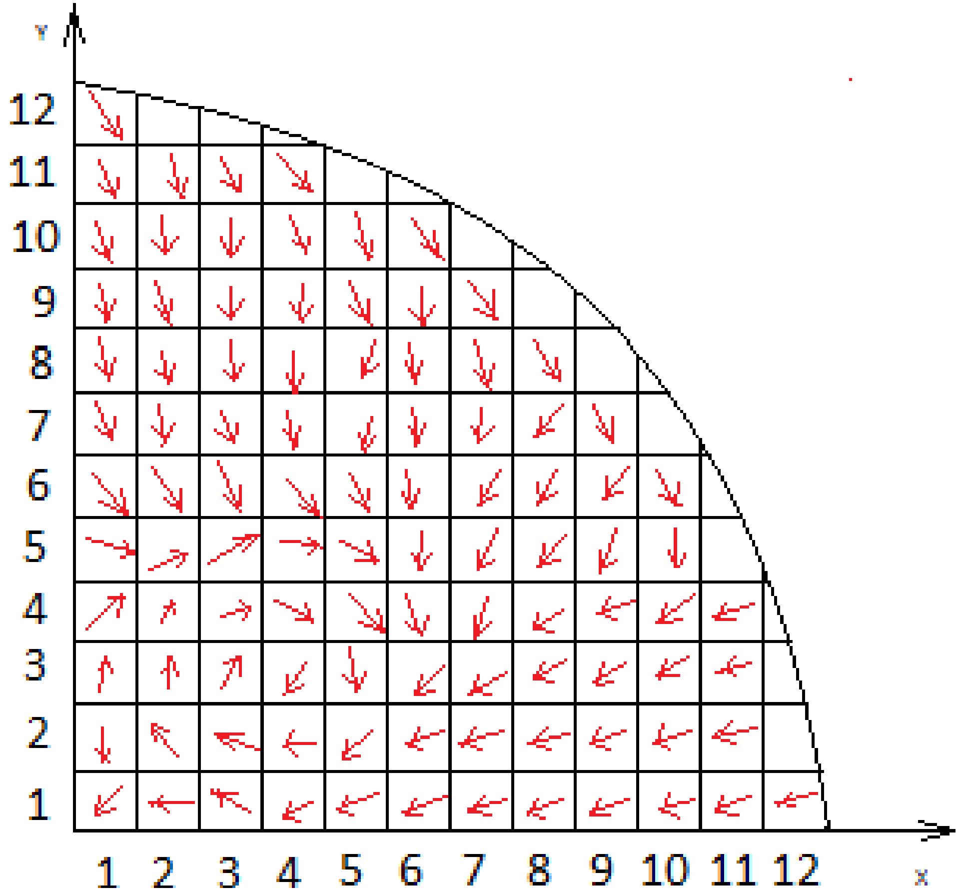


Рис. 12 Поле скоростей для нижней части сферы. ΔT = 45°C

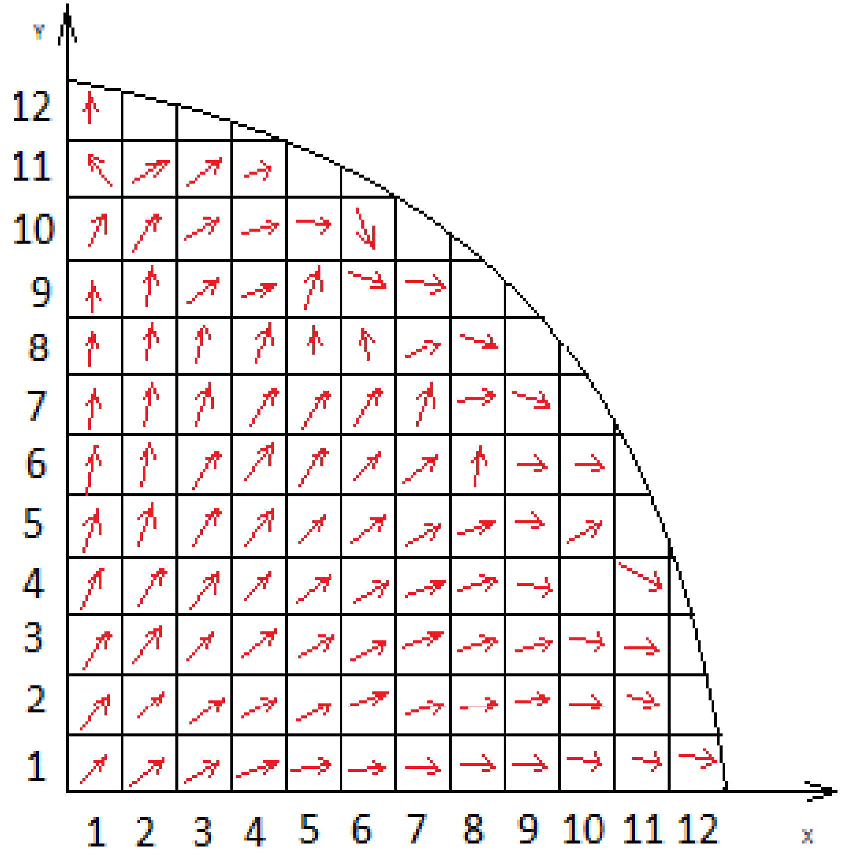


Рис. 13. Поле скоростей для верхней части сферы. ΔT =14 °C

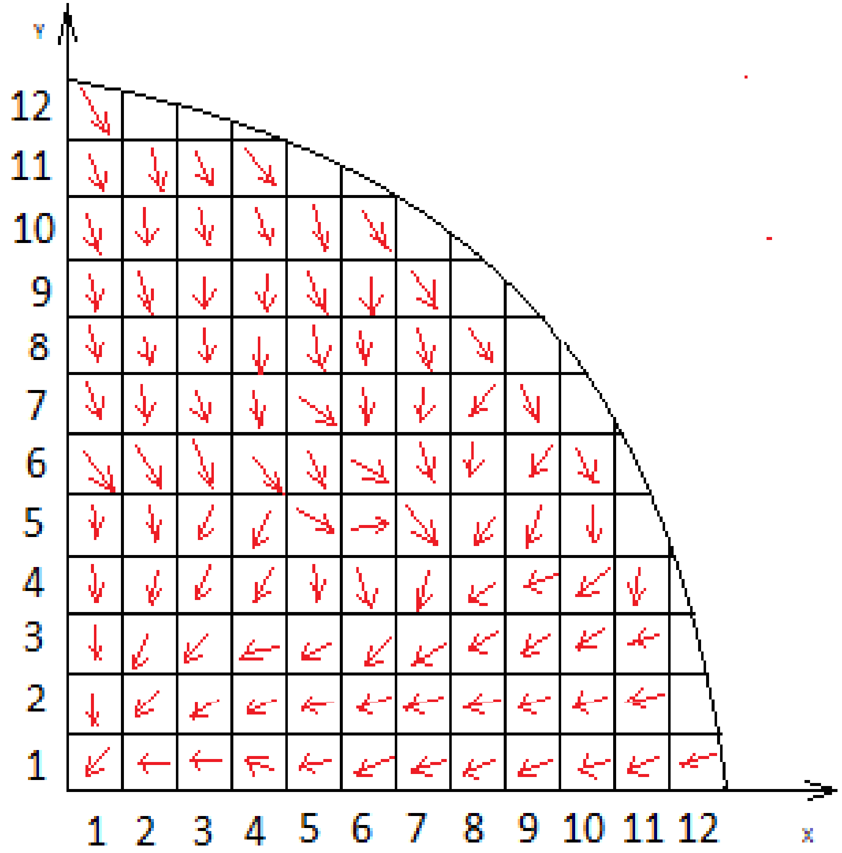


Рис. 14. Поле скоростей для нижней части сферы. ΔT = 14°C