КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ С КВАДРАТИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.В. Шаповалов[1], А.Ю. Трифонов[2], А.Л. Лисок[2]

[1]Томский государственный университет

[2]Томский политехнический университет

Пущино, 24-29 января, МКО 2011

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ С КВАДРАТИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.В. Шаповалов[1], А.Ю. Трифонов[2], А.Л. Лисок[2]

[1]Томский государственный университет

[2]Томский политехнический университет

Пущино, 24-29 января, МКО 2011

Введение

1. Свойства симметрии используются в исследования нелинейных уравнений математической физики и связаны с их интегрируемостью.

Введение

1. Свойства симметрии используются в исследования нелинейных уравнений математической физики и связаны с их интегрируемостью.
2. Основное понятие – оператор симметрии (ОС) (переводит всякое решение уравнения в некоторое его решение). Прямое вычисление ОС для нелинейных уравнений как правило невозможно.

Введение

1. Свойства симметрии используются в исследования нелинейных уравнений математической физики и связаны с их интегрируемостью.
2. Основное понятие – оператор симметрии (ОС) (переводит всякое решение уравнения в некоторое его решение). Прямое вычисление ОС для нелинейных уравнений как правило невозможно.
3. Групповой анализ *дифференциальных* уравнений изучает генераторы групп Ли операторов симметрии уравнения (симметрии уравнения), определяющие уравнения которых линейны.

Введение

1. Свойства симметрии используются в исследования нелинейных уравнений математической физики и связаны с их интегрируемостью.
2. Основное понятие – оператор симметрии (ОС) (переводит всякое решение уравнения в некоторое его решение). Прямое вычисление ОС для нелинейных уравнений как правило невозможно.
3. Групповой анализ *дифференциальных* уравнений изучает генераторы групп Ли операторов симметрии уравнения (симметрии уравнения), определяющие уравнения которых линейны.
4. Метод квазиклассических асимптотик для уравнения типа Хартри (УТХ) дает нетривиальную возможность строить в явном виде квазиклассические операторы симметрии для УТХ.

Задача Коши для уравнения типа Хартри

1. Уравнение типа Хартри запишем в виде

$$\{-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}_\varkappa(t)\}\Psi(\vec{x},t) = \tag{2.1}$$

$$= \{-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}(t) + \varkappa\hat{V}(t,\Psi(t))\}\Psi(\vec{x},t) = 0, \tag{2.2}$$

$$\Psi(\vec{x},t) \in L_2(\mathbb{R}^n_x),\ \hat{V}(t,\Psi(t)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\,\Psi^*(\vec{y},t)V(\hat{z},\hat{w},t)\Psi(\vec{y},t).$$

Линейные операторы $\hat{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{H}(\hat{z},t)$ и $V(\hat{z},\hat{w},t)$ упорядочены по Вейлю, зависят от времени t и некоммутирующих операторов

$$\hat{z} = (\hat{\vec{p}},\vec{x}) = (-i\hbar\partial/\partial\vec{x},\vec{x}), \qquad \hat{w} = (-i\hbar\partial/\partial\vec{y},\vec{y}), \qquad \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n,$$

$$[\hat{z}_k,\hat{z}_j]_- = [\hat{w}_k,\hat{w}_j]_- = i\hbar J_{kj}, \quad [\hat{z}_k,\hat{w}_j]_- = 0, \qquad k,j = \overline{1,2n}, \tag{2.3}$$

$J = \|J_{kj}\|_{2n\times 2n}$ – симплектическая матрица.

Задача Коши для уравнения типа Хартри

- Поставим задачу Коши для уравнения типа Хартри (2.2)

$$\Psi(\vec{x}, t, \hbar)|_{t=0} = \gamma(\vec{x}), \qquad \gamma \in \mathbb{S}, \qquad \|\gamma(\vec{x})\|^2 = 1 \qquad (2.4)$$

$\mathbb{S}$ – пространство Шварца.

Система Эйнштейна–Эренфеста задачи Коши для уравнения типа Хартри

- Квазиклассическое решение $\Psi(\vec{x}, t, \hbar)$ задачи Коши (2.4) строится с помощью системы моментов второго порядка (системы Эйнштейна–Эренфеста):

$$\begin{cases} \dot{z}_\Psi = J\{\mathcal{H}_z(t) + [\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa}(W_{zz}(t) + W_{zw}(t))]z_\Psi\}, \\ \dot{\Delta}_{\Psi 2} = J[\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa}W_{zz}(t)]\Delta_{\Psi 2} - \Delta_{\Psi 2}[\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa}W_{zz}(t)]J. \end{cases} \tag{2.5}$$

$$z_\Psi = \frac{1}{||\Psi(t)||^2}\big(\vec{p}_\Psi(t), \vec{x}_\Psi(t)\big) \tag{2.6}$$

Задача Коши для уравнения типа Хартри

- Центрированные моменты второго порядка

$$\Delta_{\Psi 2}(t,\hbar) = \frac{1}{2\|\Psi\|^2}\|\langle\Psi|\{\Delta\hat{z}_j\Delta\hat{z}_k + \Delta\hat{z}_k\Delta\hat{z}_j\}|\Psi\rangle\|_{2n\times 2n} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{pp}(t,\hbar) & \sigma_{px}(t,\hbar) \\ \sigma_{xp}(t,\hbar) & \sigma_{xx}(t,\hbar) \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{xp}(t,\hbar) = \frac{1}{2}\|\langle\{\Delta x_j\Delta\hat{p}_k + \Delta\hat{p}_k\Delta x_j\}\rangle\|_{n\times n},$$

$$\sigma_{xx}(t,\hbar) = \|\langle\Delta x_j\Delta x_k\rangle\|_{n\times n},$$

$$\sigma_{pp}(t,\hbar) = \|\langle\Delta\hat{p}_j\Delta\hat{p}_k\rangle\|_{n\times n} \tag{2.7}$$

$$\Delta\hat{z} = (\Delta\hat{\vec{p}},\Delta\vec{x}),\ \ \Delta\hat{\vec{p}} = \hat{\vec{p}} - \vec{p}_\Psi(t),\ \ \Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_\Psi(t).$$

Центрированное решение задачи Коши для УТХ

- Метод построения операторов симметрии УТХ использует центрированное решение задачи Коши.

Центрированное решение задачи Коши для УТХ

- Метод построения операторов симметрии УТХ использует центрированное решение задачи Коши.
- Вместо функции $\Psi(\vec{x},t)$ введем функцию $\Phi(\vec{x},t)$ в уравнении (2.2) следующим образом:

$$\Psi(\vec{x},t) = \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}[S(t) + \langle\vec{P}(t), \vec{x} - \vec{X}(t)\rangle]\Big\}\Phi(\vec{x} - \vec{X}(t), t), \tag{2.8}$$

где гладкие функции $S(t), \vec{P}(t), \vec{X}(t)$ подлежат определению.

Центрированное решение задачи Коши для УТХ

- Введем переменные $\vec{x} = \vec{u} + \vec{X}(t)$ и функцию $\tilde{\Phi}(\vec{u}, t) = \Phi(\vec{u} + \vec{X}(t), t)$.

Центрированное решение задачи Коши для УТХ

- Введем переменные $\vec{x} = \vec{u} + \vec{X}(t)$ и функцию $\tilde{\Phi}(\vec{u}, t) = \Phi(\vec{u} + \vec{X}(t), t)$.
- Продолжим операторы $\hat{z}_{\Phi u} = \hat{z}_u + Z(t)$, $\hat{w}_{\Phi u} = \hat{z}_y + Z(t)$, $\hat{z}_u = (-i\hbar\partial/\partial\vec{u}, \vec{u})$, $\hat{z}_y = (-i\hbar\partial/\partial\vec{y}, \vec{y})$.

Центрированное решение задачи Коши для УТХ

- Введем переменные $\vec{x} = \vec{u} + \vec{X}(t)$ и функцию $\tilde{\Phi}(\vec{u}, t) = \Phi(\vec{u} + \vec{X}(t), t)$.
- Продолжим операторы $\hat{z}_{\Phi u} = \hat{z}_u + Z(t)$, $\hat{w}_{\Phi u} = \hat{z}_y + Z(t)$, $\hat{z}_u = (-i\hbar\partial/\partial\vec{u}, \vec{u})$, $\hat{z}_y = (-i\hbar\partial/\partial\vec{y}, \vec{y})$.
- Для $\tilde{\Phi}$ получим уравнение:

$$\Big\{ - i\hbar\partial_t + i\hbar\langle\dot{\vec{X}}(t), \frac{\partial}{\partial\vec{u}}\rangle + \dot{S}(t) + \langle\dot{\vec{P}}(t), \vec{u}\rangle - \langle\vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t)\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\langle\hat{z}_{\Phi u}, \mathcal{H}_{zz}(t)\hat{z}_{\Phi u}\rangle + \langle\mathcal{H}_z(t), \hat{z}_{\Phi u}\rangle +$$
$$+\varkappa\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\,\tilde{\Phi}^*(\vec{y}, t)\Big(\frac{1}{2}\langle\hat{z}_{\Phi u}, W_{zz}(t)\hat{z}_{\Phi u}\rangle + \langle\hat{z}_{\Phi u}, W_{zw}(t)\hat{w}_{\Phi u}\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\langle\hat{w}_{\Phi u}, W_{ww}(t)\hat{w}_{\Phi u}\rangle\Big)\tilde{\Phi}(\vec{y}, t)\Big\}\tilde{\Phi}(\vec{u}, t) = 0, \tag{2.9}$$

Центрированное решение задачи Коши для УТХ

- Функция $\tilde{\Phi}(\vec{u}, t)$ центрирована

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}^*(\vec{u}, t)\hat{z}_u\tilde{\Phi}(\vec{u}, t)d\vec{u} = 0 \tag{2.10}$$

Центрированное решение задачи Коши для УТХ

- Функция $\tilde{\Phi}(\vec{u}, t)$ центрирована

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}^*(\vec{u}, t)\hat{z}_u\tilde{\Phi}(\vec{u}, t)d\vec{u} = 0 \qquad (2.10)$$

- и удовлетворяет начальному условию

$$\tilde{\Phi}(\vec{u}, t)\Big|_{t=0} = \exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}[S(0)+\langle\vec{P}(0), \vec{u}\rangle]\Big\}\gamma(\vec{u}+\vec{X}(0)). \qquad (2.11)$$

Линейное ассоциированное уравнение

- Определим вектор $z = Z(t) = (\vec{P}(t), \vec{X}(t))$ уравнением

$$\dot{Z}(t) = J\{\mathcal{H}_z(t) + [\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa}(W_{zz}(t) + W_{zw}(t))]Z(t)\} \tag{2.12}$$

и начальным условием $Z(0) = \langle\gamma(\vec{x})|\hat{z}|\gamma(\vec{x})\rangle$.

Линейное ассоциированное уравнение

- Определим вектор $z = Z(t) = (\vec{P}(t), \vec{X}(t))$ уравнением

$$\dot{Z}(t) = J\{\mathcal{H}_z(t) + [\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa}(W_{zz}(t) + W_{zw}(t))]Z(t)\} \tag{2.12}$$

и начальным условием $Z(0) = \langle\gamma(\vec{x})|\hat{z}|\gamma(\vec{x})\rangle$.

- Определим функцию $S(t)$:

$$S(t) = \int\limits_0^t \Big\{\langle\vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t)\rangle - \mathfrak{H}(t)\Big\}dt, \tag{2.13}$$

где

$$\mathfrak{H}(t) = \frac{1}{2}\langle Z(t), [\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa}(W_{zz}(t) + 2W_{zw}(t) +$$
$$+W_{ww}(t))]Z(t)\rangle + \langle\mathcal{H}_z(t), Z(t)\rangle + \frac{1}{2}\tilde{\varkappa}\mathrm{Sp}(W_{ww}(t)\Delta_2).$$

Линейное ассоциированное уравнение

- Матрица Δ_2 порядка $2n \times 2n$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Delta}_2 = J[\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa} W_{zz}(t)]\Delta_2 - \Delta_2[\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa} W_{zz}(t)]J \tag{2.14}$$

и начальному условию

$$\Delta_2(0) = \frac{1}{2}\|\langle\gamma(\vec{x})|\{\Delta\hat{z}_j\Delta\hat{z}_k + \Delta\hat{z}_k\Delta\hat{z}_j\}|\gamma(\vec{x})\rangle\|. \tag{2.15}$$

Линейное ассоциированное уравнение

- Матрица Δ_2 порядка $2n \times 2n$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Delta}_2 = J[\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa} W_{zz}(t)]\Delta_2 - \Delta_2[\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa} W_{zz}(t)]J \tag{2.14}$$

и начальному условию

$$\Delta_2(0) = \frac{1}{2}\|\langle\gamma(\vec{x})|\{\Delta\hat{z}_j\Delta\hat{z}_k + \Delta\hat{z}_k\Delta\hat{z}_j\}|\gamma(\vec{x})\rangle\|. \tag{2.15}$$

Лемма

Функция $\tilde{\Phi}(\vec{u}, t)$ есть центрированное решение задачи Коши для линейного ассоциированного уравнения

$$\left\{ - i\hbar\partial_t + \frac{1}{2}\langle\hat{z}_u, (\mathcal{H}_{zz}(t) + \varkappa W_{zz})\hat{z}_u\rangle\right\}\tilde{\Phi}(\vec{u}, t) = 0 \tag{2.16}$$

с начальным условием (2.11).

Линейное ассоциированное уравнение

Квазиклассический алгоритм сопоставляет центрированному решению задачи Коши для ЛАУ решение задачи Коши для исходного нелинейного уравнения типа Хартри.

Линейное ассоциированное уравнение (2.16) не содержит моментов функции $\Psi(\vec{x}, t)$, поэтому можно использовать его операторы симметрии для построения операторов симметрии исходного нелинейного уравнения типа Хартри.

Оператор симметрии линейного ассоциированного уравнения

- Определим линейный оператор $\hat{A}(\vec{u}, t)$ симметрии *линейного ассоциированного уравнения (ЛАУ)* вида (2.16) условием

$$\Big[-i\hbar\partial_t + \frac{1}{2}\langle \hat{z}_u, (\mathcal{H}_{zz}(t) + \varkappa W_{zz})\hat{z}_u\rangle, \hat{A}(\vec{u}, t)\Big] = 0. \quad (3.17)$$

При $t = 0$

$$\widehat{A}(\vec{u}, t)|_{t=0} = \hat{a}(\vec{u}), \quad (3.18)$$

где линейный оператор $\hat{a}(\vec{u}) : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$.

Оператор симметрии линейного ассоциированного уравнения

- Определим линейный оператор $\hat{A}(\vec{u}, t)$ симметрии *линейного ассоциированного уравнения (ЛАУ)* вида (2.16) условием

$$\Big[-i\hbar\partial_t + \frac{1}{2}\langle\hat{z}_u, (\mathcal{H}_{zz}(t) + \varkappa W_{zz})\hat{z}_u\rangle, \hat{A}(\vec{u}, t)\Big] = 0. \quad (3.17)$$

  При $t = 0$

$$\widehat{A}(\vec{u}, t)|_{t=0} = \hat{a}(\vec{u}), \quad (3.18)$$

  где линейный оператор $\hat{a}(\vec{u}) : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$.

- Структуру оператора $\hat{A}(\vec{u}, t)$ зададим с помощью гладкой функции $A(z, t)$ – вейлевского символа оператора $\hat{A}(\vec{u}, t)$: $\hat{A}(\vec{u}, t) = A(\hat{z}_u, t)$.

Оператор симметрии линейного ассоциированного уравнения

- Оператор симметрии $\widehat{A}(\vec{u}, t)$ *ЛАУ* (2.16) переводит центрированное решение $\tilde{\Phi}(\vec{u}, t)$ уравнения (2.16) в некоторое другое решение (обозначим его $\overline{\Phi}_A(\vec{u}, t)$) этого уравнения:

$$\overline{\Phi}_A(\vec{u}, t) = \frac{1}{\alpha_A} \widehat{A}(\vec{u}, t) \tilde{\Phi}(\vec{u}, t), \tag{3.19}$$

где $\alpha_A = \|\hat{a}\tilde{\Phi}(\vec{u}, 0)\|$.

Оператор симметрии линейного ассоциированного уравнения

- Оператор симметрии $\widehat{A}(\vec{u},t)$ *ЛАУ* (2.16) переводит центрированное решение $\tilde{\Phi}(\vec{u},t)$ уравнения (2.16) в некоторое другое решение (обозначим его $\overline{\Phi}_A(\vec{u},t)$) этого уравнения:
$$\overline{\Phi}_A(\vec{u},t)=\frac{1}{\alpha_A}\widehat{A}(\vec{u},t)\tilde{\Phi}(\vec{u},t), \tag{3.19}$$
где $\alpha_A=\|\hat{a}\tilde{\Phi}(\vec{u},0)\|$.
- При $t=0$
$$\overline{\Phi}_A(\vec{u},0)=\frac{1}{\alpha_A}\hat{a}(\vec{u})\phi(\vec{u})=\phi_A(\vec{u}). \tag{3.20}$$
Здесь $||\phi_A(\vec{u})||=1$, тогда $||\tilde{\Phi}_A(\vec{u},t)||=1$.

Оператор симметрии линейного ассоциированного уравнения

- В общем случае функция $\overline{\Phi}_A(\vec{u}, t)$ не центрирована,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi}^*_A(\vec{u}, 0)\hat{z}_u\overline{\Phi}_A(\vec{u}, 0)d\vec{u} \neq 0, \qquad (3.21)$$

поэтому в рамках используемого квазиклассического формализма ей невозможно сопоставить решение исходного уравнения типа Хартри.

Оператор симметрии линейного ассоциированного уравнения

- Чтобы построить центрированное решение *ЛАУ*, соответствующее $\tilde{\Phi}(\vec{u}, t)$, введем первый момент этой функции,

$$\lambda_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi}^*_A(\vec{u}, 0)\hat{z}_u \overline{\Phi}_A(\vec{u}, 0) d\vec{u} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^*_A(\vec{u})\hat{z}_u \phi_A(\vec{u}) d\vec{u}, \tag{3.22}$$

$$\lambda(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi}^*_A(\vec{u}, t)\hat{z}_u \overline{\Phi}_A(\vec{u}, t) d\vec{u}. \tag{3.23}$$

Оператор симметрии линейного ассоциированного уравнения

Теорема

Если $\lambda(t) = (\vec{\lambda}_p(t), \vec{\lambda}_u(t))^T$ *есть решение задачи Коши*

$$\dot{\lambda}(t) = J(\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa} W_{zz}(t))\lambda(t), \tag{3.24}$$

$\lambda(0) = \lambda_0 = (\vec{\lambda}_{p_0}, \vec{\lambda}_{u_0})^T$, *то*

$$\tilde{\Phi}_A(\vec{u}, t) = \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}[S_\lambda(t) + \langle\vec{\lambda}_p(t), \vec{u} + \vec{\lambda}_u(t)\rangle]\Big\}\overline{\Phi}_A(\vec{u} + \vec{\lambda}_u(t), t), \tag{3.25}$$

есть центрированное решение ЛАУ (2.16)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}^*_A(\vec{u}, t)\hat{z}_u \tilde{\Phi}_A(\vec{u}, t) d\vec{u} = 0. \tag{3.26}$$

Оператор симметрии линейного ассоциированного уравнения

- Здесь

$$S_\lambda(t) = \int\limits_0^t \Big\{ \langle \vec{\lambda}_p(t), \dot{\vec{\lambda}}_u(t) \rangle - \mathfrak{H}_\lambda(t) \Big\} dt, \qquad (3.27)$$

Оператор симметрии линейного ассоциированного уравнения

- Здесь

$$S_\lambda(t) = \int\limits_0^t \Big\{ \langle \vec{\lambda}_p(t), \dot{\vec{\lambda}}_u(t) \rangle - \mathfrak{H}_\lambda(t) \Big\} dt, \tag{3.27}$$

-

$$\mathfrak{H}_\lambda(t) = \frac{1}{2} \langle \lambda(t), [\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\varkappa}(W_{zz}(t) + 2W_{zw}(t) + \\ + W_{ww}(t))]\lambda(t) \rangle + \frac{1}{2} \tilde{\varkappa} \mathrm{Sp}(W_{ww}(t)\Delta_2).$$

Оператор симметрии уравнения типа Хартри

- Построим оператор симметрии исходного нелинейного уравнения типа Хартри.

Оператор симметрии уравнения типа Хартри

- Построим оператор симметрии исходного нелинейного уравнения типа Хартри.
- Для этого установим соответствие, согласно (2.8),

$$\Psi(\vec{x},t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S(t) + \langle\vec{P}(t), \vec{x} - \vec{X}(t)\rangle]\right\}\Phi(\vec{x} - \vec{X}(t), t),$$

функций $\tilde{\Phi}_A(\vec{u},t) = \Phi(\vec{x} + \vec{X}_A(t), t)$ и $\tilde{\Phi}(\vec{u},t) = \Phi(\vec{x} + \vec{X}(t), t)$ с функциями $\Psi_A(\vec{x},t)$ and $\Psi(\vec{x},t)$, соответственно.
Здесь $Z_A(t) = (\vec{P}_A(t), \vec{X}_A(t))$ – вектор, удовлетворяющий системе (2.12) с начальным условием и начальным условием $Z(0) = \langle\gamma_A(\vec{x})|\hat{z}|\gamma_A(\vec{x})\rangle$. С помощью этого вектора из решения $\Phi(\vec{u},t)$ получается центрированное решение $\tilde{\Phi}_A(\vec{u},t)$, которое, в свою очередь, позволяет построить решение нелинейного уравнения типа Хартри $\tilde{\Psi}_A(\vec{x},t)$.

Оператор симметрии уравнения типа Хартри

- Соответствие между указанными функциями основано на соотношении

$$
\begin{aligned}
&\exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}[S_A(t)+\langle\vec{P}_A(t),\vec{x}-\vec{X}_A(t)\rangle]\Big\}\Psi_A(\vec{x},t)=\\
&=\frac{1}{\alpha_A}\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}[S_\lambda(t)+\langle\vec{\lambda}_p(t),\vec{x}-\vec{X}_A(t)+\\
&\qquad+\vec{\lambda}_u(t)\rangle]\Big\}A(\vec{x}-\vec{X}_A(t)+\vec{\lambda}_u(t),t)\times\\
&\times\exp\Big\{-\frac{i}{\hbar}[S(t)+\langle\vec{P}(t),\vec{x}-\vec{X}(t)\rangle]\Big\}\times\\
&\qquad\times\Psi(\vec{x}+\vec{X}(t)-\vec{X}_A(t)+\vec{\lambda}_u(t),t).
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Оператор симметрии уравнения типа Хартри

- Из соотношения (4.28) следует

$$\Psi_A(\vec{x},t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S_A(t) + \langle\vec{P}_A(t), \vec{x} - \vec{X}_A(t)\rangle]\right\} \times$$
$$\times\frac{1}{\alpha_A}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S_\lambda(t) + \langle\vec{\lambda}_p(t), \vec{x} - \vec{X}_A(t) + \vec{\lambda}_u(t)\rangle]\right\} \times$$
$$\times A(\vec{x} - \vec{X}_A(t) + \vec{\lambda}_u(t), t) \times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}[S(t) + \langle\vec{P}(t), \vec{x} - \vec{X}(t)\rangle]\right\} \times$$
$$\times\Psi(\vec{x} + \vec{X}(t) - \vec{X}_A(t) + \vec{\lambda}_u(t), t). \qquad (4.29)$$

Оператор симметрии уравнения типа Хартри

Теорема

Оператор $\widehat{A}_{nl}$, определенный соотношением (4.29) ,

$$\Psi_A(\vec{x}, t) = \widehat{A}_{nl}\Psi(\vec{x}, t)$$

является оператором симметрии исходного нелинейного уравнения типа Хартри.

Резюме

- Прямое вычисление операторов симметрии для нелинейных интегродифференциальных уравнений в многомерном пространстве с переменными коэффициентами проблематично ввиду сложности определяющих уравнений.

Резюме

- Прямое вычисление операторов симметрии для нелинейных интегродифференциальных уравнений в многомерном пространстве с переменными коэффициентами проблематично ввиду сложности определяющих уравнений.
- Формализм квазикласических асимптотик дает уникальную возможность построения операторов симметрии в квазиклассическом приближении.

Резюме

- Прямое вычисление операторов симметрии для нелинейных интегродифференциальных уравнений в многомерном пространстве с переменными коэффициентами проблематично ввиду сложности определяющих уравнений.
- Формализм квазикласических асимптотик дает уникальную возможность построения операторов симметрии в квазиклассическом приближении.
- Для уравнения типа Хартри с оператором квадратичным по производным и пространственным координатам квазиклассические операторы симметрии оказываются точными.

Резюме

- Прямое вычисление операторов симметрии для нелинейных интегродифференциальных уравнений в многомерном пространстве с переменными коэффициентами проблематично ввиду сложности определяющих уравнений.
- Формализм квазикласических асимптотик дает уникальную возможность построения операторов симметрии в квазиклассическом приближении.
- Для уравнения типа Хартри с оператором квадратичным по производным и пространственным координатам квазиклассические операторы симметрии оказываются точными.