

**ТЕСТИРОВАНИЕ СХЕМ С
РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ
ТОЧНОСТИ И
УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ
РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
МЕТОДОМ ПРЯМЫХ**

Коконков Н.И., Ширков П.Д.

Конструирование разностных схем

Теоретические аспекты

- Выписывание условий порядка
- Совмещение условий порядка и желаемых характеристик надёжности
- Согласование вычислительной сложности

Вычислительный эксперимент

- Исследование схем на модельных задачах
 - С известным точным решением
 - С известным поведением точного решения
 - С характерными вычислительными особенностями

В данной работе

- В качестве модельной взята задача нелинейной нестационарной теплопроводности
- Обладает точным автомодельным решением типа «бегущей волны» в одномерном случае

- В качестве методов взяты метод прямых и методы Розенброка с комплексными коэффициентами
- $s \leq 2$
- $p \geq 2$
- q играет роль своеобразного параметра

Постановка модельной задачи

Двумерная задача нелинейной теплопроводности

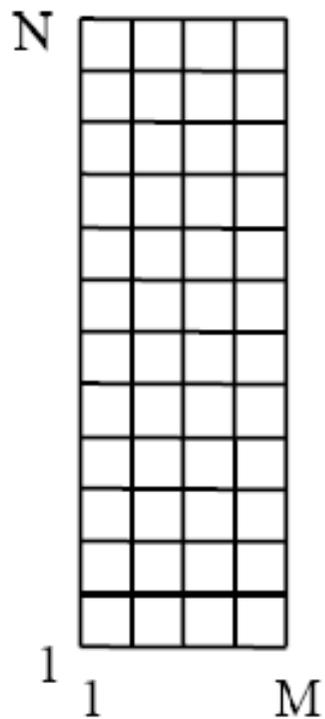
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad \kappa(T) = T^\alpha,$$

с малым начальным «фоновым» значением температуры T_0 решается в простой области. В случае одной пространственной переменной обладает автомодельным решением

$$T_{PR}(\xi) = \begin{cases} \sqrt[\alpha]{\alpha D} (-\xi)^{1/\alpha}, & \xi \leq 0 \\ 0, & \xi > 0 \end{cases}, \quad \xi = y - Dt,$$

где D – скорость распространения «тепловой волны».

Постановка модельной задачи и разностная аппроксимация по пространству



Область счета

$$\kappa_{j+\frac{1}{2}k}^s = \frac{(T_{j+1k}^s)^\alpha + (T_{jk}^s)^\alpha}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{1}{h_x} \left(\kappa_{j+\frac{1}{2}k}^s \frac{1}{h_x} (T_{j+1k}^s - T_{jk}^s) - \kappa_{j-\frac{1}{2}k}^s \frac{1}{h_x} (T_{jk}^s - T_{j-1k}^s) \right)$$

Граничные
условия для
рассматриваемой
задачи

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_1, x_M} = 0,$$

$$T \Big|_{y=y_1} = T_{PR}(-Dt),$$

$$T \Big|_{y=y_N} = T_0,$$

Общий вид схем

Двухстадийные схемы Розенброка с комплексными коэффициентами:

$$\vec{y}(t + \tau) = \vec{y}(t) + \tau \operatorname{Re} \left(\beta_1 \vec{k}_1 + \beta_0 \vec{k}_2 \right),$$

$$\left(E - \gamma_1 \tau \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} (\vec{y}(t)) \right) \vec{k}_1 = \vec{f} (\vec{y}(t)),$$

$$\left(E - \gamma_2 \tau \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} (\vec{y}(t) + \gamma_{21} \tau \vec{k}_1) \right) \vec{k}_2 = \vec{f} (\vec{y}(t) + \alpha_{21} \tau \vec{k}_1).$$

Две крупные группы используемых схем

Схемы с одним
вычислением
матрицы Якоби

- 4 схемы 2-3 порядков аппроксимации с различными скоростями затухания функции устойчивости на бесконечности (схемы Розенброка-Ваннера)

Схемы с двумя
вычислениями
матрицы Якоби

- 5 схем 4-8 порядков с соответственно уменьшающимися скоростями затухания функции устойчивости на бесконечности

Некоторые результаты или что мы хотим получить?

- Мы хотим выявить любую из причин, по которой для данной задачи может не сработать какой-либо из методов
- По возможности устранить причину ненадёжности схем для данной задачи, чтобы впоследствии с этим не сталкиваться
- Найти компромисс между теоретическим порядком аппроксимации, свойствами устойчивости и монотонности
- Проверить монотонность схемы на нелинейных задачах

Монотонность схемы

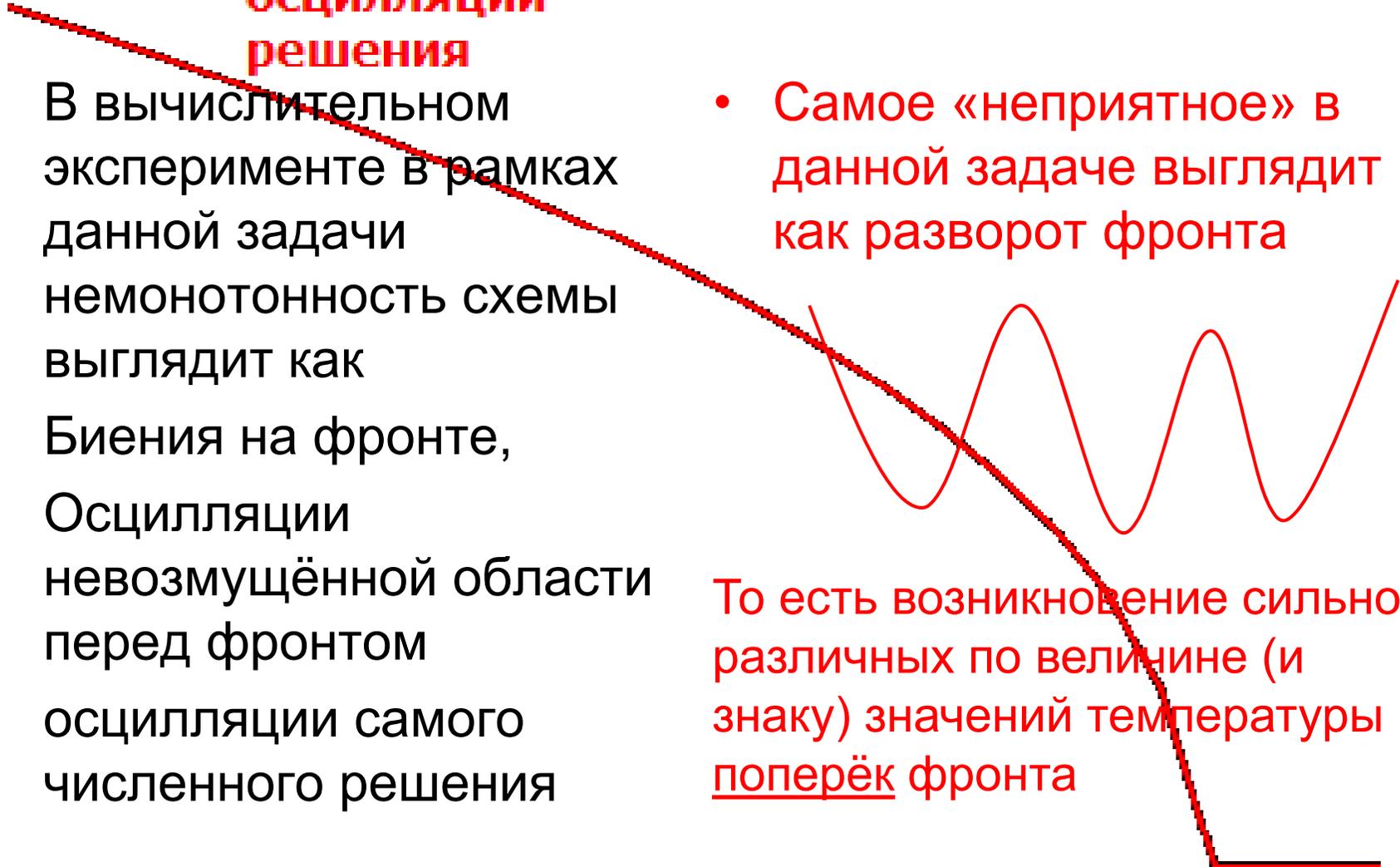
осцилляции решения

- В вычислительном эксперименте в рамках данной задачи немонотонность схемы выглядит как
- Биения на фронте,
- Осцилляции невозмущённой области перед фронтом
- осцилляции самого численного решения

- Самое «неприятное» в данной задаче выглядит как разворот фронта

То есть возникновение сильно различных по величине (и знаку) значений температуры поперёк фронта

осцилляции
перед фронтом



Замечания

- Расчёты показали, что
 - Первейший источник немонотонностей – начало расчёта
 - Слабонемонотонные схемы без дополнительных ухищрений не способны преодолеть запуск с точки $t=0$
 - Схема, преодолевшая запуск, может «развернуть», а может и не «развернуть» фронт
- Вывод
 - Осцилляция решения на протяжении всего расчёта - с монотонностью у схемы совсем всё нехорошо
 - Запустить можно и немного «позже», но это не даёт каких-либо гарантий от «разбалтывания» решения в дальнейшем
 - Если в программе есть автоматическое предсказание «разворота фронта», лучше его отключить

Плюсы и минусы

- Пропустив пару-тройку начальных шагов мы сэкономим в вычислениях
- То же самое с отключением предохранителя от немонотонности
- *Что мы получим взамен?*
- Нет гарантий, что такой подход всегда сработает, по сути, это разовая мера
- Настоящую неслабую немонотонность мы уже не отследим
- *Выигрыш или NaNотехнологию?*

Таблицы

2	L2	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	I
		2.3	.3150	.1922	
		4.0	.7506	.4742	
		5.6	1.571	.6406	
		8.0	3.141	.7733	
2	L2	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	II
		2.3	—	.1734	
		4.0	—	.4402	
		5.6	—	.6087	
		8.0	—	.7503	
4	L4	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	III
		2.3	—	—	
		4.0	.5459	.4540	
		5.6	—	—	
		8.0	—	.7636	
5	L3	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	IV
		2.3	.2109	.1792	
		4.0	.5148	.4548	
		5.6	—	.6245	
		8.0	—	.7639	
6	L2	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	V
		2.3	.2056	.1783	
		4.0	.5094	.4533	
		5.6	.8233	.6233	
		8.0	—	.7632	

7	L1	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	VI
		2.3	.3000	.2001	
		4.0	.6206	.4840	
		5.6	.7579	.6479	
		8.0	—	.7777	
8	A	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	VII
		2.3	.2573	.1915	
		4.0	.5734	.4723	
		5.6	.7209	.6387	
		8.0	.8970	.7723	
2	L2	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	IX
		2.3	.2039	.1812	
		4.0	.4846	.4572	
		5.6	—	.6261	
		8.0	—	.7644	
2	L1	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	X
		2.3	.2082	.1815	
		4.0	.4884	.4573	
		5.6	.6751	.6257	
		8.0	—	.7637	
3	L3	$\alpha \backslash \tau$	0.02	0.004	XI
		2.3	.1247	.1614	
		4.0	—	.4349	
		5.6	—	.6121	
		8.0	—	.7592	