



МГУ имени М.В. Ломоносова  
факультет Вычислительной Математики и Кибернетики  
кафедра Вычислительных Методов  
лаборатория Математического Моделирования в Физике

# Математическое моделирование конвективного движения в плоском слое жидкости

Горелиц Наталья Кирилловна

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н. Калачинская И.С.

Пущино 2011

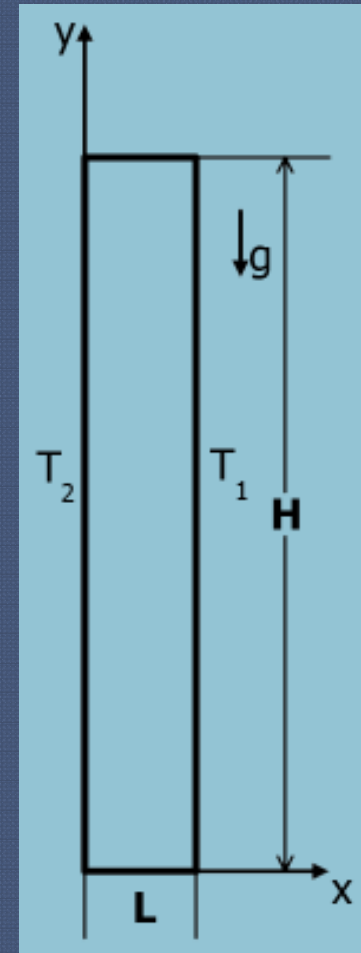
# Введение

---

- ◎ В настоящее время исследование конвективного движения в плоском слое жидкости является важной прикладной задачей.
- ◎ Впервые возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости было описано Джеймсом Томсоном в 1888 году.

# Постановка задачи

Рассматривается естественная конвекция в плоском вертикальном слое между изотермическими поверхностями высоты  $H$ , расположенными на расстоянии  $L$  друг от друга. Основания слоя теплоизолированы, сила тяжести направлена вертикально вниз.



# Система уравнений

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = -\beta \vec{g} T + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi_{NS} + \operatorname{div} \left[ (\vec{\omega} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{\omega}) \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u} T) = \operatorname{div}(\vec{\omega} T) + \chi \Delta T.$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{\omega},$$

$$\Pi_{NS} = \eta \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right], \quad \vec{\omega} = \tau \left( (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \beta \vec{g} T \right).$$

Обозначения:

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$$

– вектор гидродинамической скорости,

$$p = p(\vec{x}, t)$$

– давление, отсчитываемое от гидростатического,

$$T = T(\vec{x}, t)$$

– отклонение температуры от ее среднего значения,

$$\tau$$

– малый параметр регуляризации.

# Система уравнений

## Начальные условия

$$u_x|_{t=0} = u_y|_{t=0} = 0, \quad T|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = 0.$$

## Граничные условия

Левая стенка:

$$x = 0, 0 < y < A,$$

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad T = 1;$$

Правая стенка:

$$x = 1, 0 < y < A,$$

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad T = 0;$$

Нижнее основание:

$$0 < x < 1, y = 0,$$

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = Gr T, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

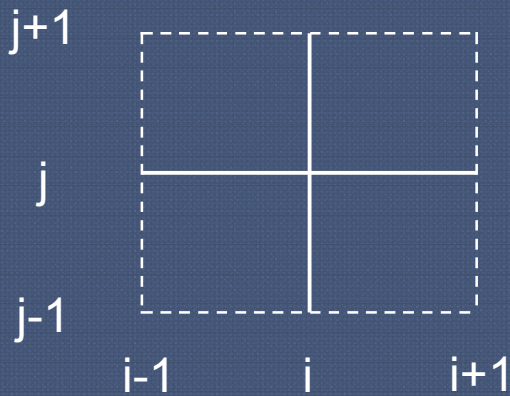
Верхнее основание:

$$0 < x < 1, y = A,$$

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = Gr T, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

$A = H/L$  - отношение высоты слоя к ширине

# Аппроксимация на прямоугольной сетке



$h_x$  – шаг сетки по оси  $x$

$h_y$  – шаг сетки по оси  $y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2h_x} (f_{i+1} - f_{i-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2h_y} (f_{j+1} - f_{j-1})$$

$$\Delta p = \frac{1}{h_x^2} (p_{i+1,j} - 2p_{ij} + p_{i-1,j}) + \frac{1}{h_y^2} (p_{i,j+1} - 2p_{ij} + p_{i,j-1})$$

# Алгоритм расчета

## 1. Вычисление полей скорости и температуры в начальный момент времени

$$(u_x)_{ij} = (u_y)_{ij} = 0, \quad T_{ij} = 0, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h.$$

$$T_{0j} = 2 - T_{1j}, \quad T_{N_x+1,j} = -T_{N_x,j}, \quad j = \overline{1, N_y};$$

$$T_{i0} = T_{i1}, \quad T_{i,N_y+1} = T_{i,N_y}, \quad i = \overline{1, N_x};$$

$$T_{00} = 2 - T_{11}, \quad T_{0,N_y+1} = 2 - T_{1N_y},$$

$$T_{N_x+1,0} = -T_{N_x,1}, \quad T_{N_x+1,N_y+1} = -T_{N_x,N_y};$$

$$(u_x)_{0j} = -(u_x)_{1j}, \quad (u_y)_{0j} = -(u_y)_{1j},$$

$$(u_x)_{N_x+1,j} = -(u_x)_{N_x,j}, \quad (u_y)_{N_x+1,j} = -(u_y)_{N_x,j}, \quad j = \overline{1, N_y};$$

$$(u_x)_{i0} = -(u_x)_{i1}, \quad (u_y)_{i0} = -(u_y)_{i1},$$

$$(u_x)_{i,N_y+1} = (u_x)_{i,N_y} - \frac{Ma}{Pr} \frac{h_y}{h_x} \frac{T_{i+1,N_y} - T_{i-1,N_y}}{2},$$

$$(u_y)_{i,N_y+1} = -(u_y)_{i,N_y}, \quad i = \overline{1, N_x};$$

$$(u_x)_{00} = (u_x)_{11}, \quad (u_y)_{00} = (u_y)_{11},$$

$$(u_x)_{N_x+1,0} = (u_x)_{N_x,1}, \quad (u_y)_{N_x+1,0} = (u_y)_{N_x,1},$$

$$(u_x)_{0,N_y+1} = -(u_x)_{1,N_y} + \frac{Ma}{Pr} \frac{h_y}{h_x} \frac{T_{2,N_y} - T_{0,N_y}}{2},$$

$$(u_y)_{0,N_y+1} = (u_y)_{1,N_y},$$

$$(u_x)_{N_x+1,N_y+1} = -(u_x)_{N_x,N_y} + \frac{Ma}{Pr} \frac{h_y}{h_x} \frac{T_{N_x+1,N_y} - T_{N_x-1,N_y}}{2},$$

$$(u_y)_{N_x+1,N_y+1} = (u_y)_{N_x,N_y}.$$

# Алгоритм расчета

## 2. Определение поля давления путем решения

$$\frac{1}{h_x^2}(p_{i+1,j} - 2p_{ij} + p_{i-1,j}) + \frac{1}{h_y^2}(p_{i,j+1} - 2p_{ij} + p_{i,j-1}) = -\varphi_{ij}.$$

$$\begin{aligned} p_{0j} &= p_{1j}, \quad p_{N_x+1,j} = p_{N_x,j}, \quad j = \overline{1, N_y}; \\ p_{i0} &= p_{i1} - h_y Gr T_{i,1/2}, \\ p_{i,N_y+1} &= p_{i,N_y} + h_y Gr T_{i,N_y+1/2}, \quad i = \overline{1, N_x}; \\ p_{00} &= p_{11} + h_y Gr T_{1,1/2}, \\ p_{0,N_y+1} &= p_{1,N_y} - h_y Gr T_{1,N_y+1/2}, \\ p_{N_x+1,0} &= p_{N_x,1} + h_y Gr T_{N_x,1/2}, \\ p_{N_x+1,N_y+1} &= p_{N_x,N_y} - h_y Gr T_{N_x,N_y+1/2}, \\ p_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Для решения использовались метод переменных направлений и итерационный метод на основе прогонки. При  $t = 0$  в качестве нулевого приближения используется сеточная функция

$$p_{ij}^{(0)} = 0, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h$$

Для остальных  $t$  величины  $p_{ij}^{(0)}$  полагаются равными значениям давления на предыдущем слое по времени.

Условие выхода из итерационного цикла имеет вид:

$$\sum_{(x_i, y_j) \in \omega_h} \left( \frac{1}{h_x^2} [p_{i+1,j} - 2p_{ij} + p_{i-1,j}] + \frac{1}{h_y^2} [p_{i,j+1} - 2p_{ij} + p_{i,j-1}] + \varphi_{ij} \right)^2 h_x h_y < \varepsilon_p, \quad \text{где } \varepsilon_p \text{ — заданная точность.}$$

# Алгоритм расчета

---

3. Нахождение полей скорости и температуры при  $\hat{t} = t + \Delta t$  с помощью дискретных аналогов уравнений движения и уравнения переноса тепла.
4. Переброска массивов и возврат к п. 1.

# Алгоритм расчета

Течение считается установившимся, если

$$\max_{(x_i, y_j) \in \omega_h} \left\{ \left| \frac{(u_x)_{ij}^{n+1} - (u_x)_{ij}^n}{\Delta t} \right| + \left| \frac{(u_y)_{ij}^{n+1} - (u_y)_{ij}^n}{\Delta t} \right| \right\} < \varepsilon_u.$$

Здесь  $n$  – номер шага по времени. Для обеспечения устойчивости счета параметр  $\tau$  следует вычислять по формуле

$$\tau = \frac{1}{\text{Re}_s^2} + \tau_0,$$

где  $\tau_0$  – положительный регуляризирующий параметр.

# Итерационный метод на основе прогонки

Разностный аналог уравнения Пуассона

$$Gf = Af_{i-1} + Bf_{i+1} + Cf_{j-1} + Df_{j+1} + H$$

Вид решения

$$f = \alpha f_{i+1} + \beta f_{j+1} + \delta$$

Преобразуем

$$(G - A\alpha_{i-1} - C\beta_{j-1})f = Bf_{i+1} + Df_{j+1} + A(\beta_{i-1}f_{i-1,j+1} + \delta_{i-1}) + C(\alpha_{j-1}f_{i+1,j-1} + \delta_{j-1}) + H$$

Прогоночные коэффициенты

$$\alpha = \frac{B}{K}, \beta = \frac{D}{K}, \delta = \left[ \frac{A(\beta_{i-1}f_{i-1,j+1} + \delta_{i-1}) + C(\alpha_{j-1}f_{i+1,j-1} + \delta_{j-1}) + H}{K} \right],$$

$$K = G - A\alpha_{i-1} - C\beta_{j-1}$$

Прекращение итераций

$$\max_{ij} \frac{\left( \begin{smallmatrix} Up \\ f - f \end{smallmatrix} \right)}{N_x N_y} < \varepsilon_2$$

# Модельная задача

1. Квадратная область

$$\overline{G} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

2. Равномерная сетка

$$x \in \omega_h, u|_{\gamma_h} = \mu(x),$$
$$\overline{\omega_h} = \omega_h + \gamma_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h) \in \overline{G}\}$$

3. Решаем уравнение Пуассона

$$\Delta u = -f(x, y)$$

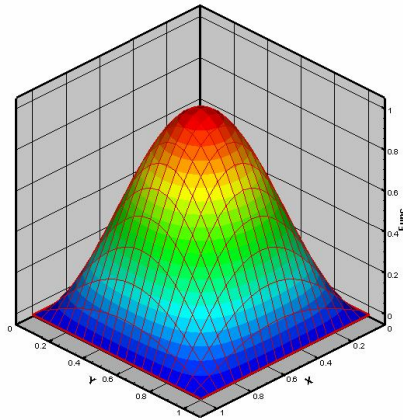
4. Правая часть

$$2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

# Сравнение

N=20

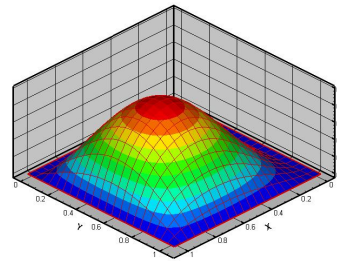
Точное решение



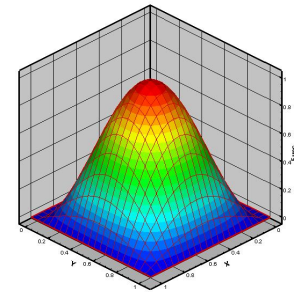
$$\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

Метод переменных направлений

n=5

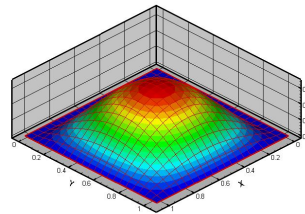


n=40

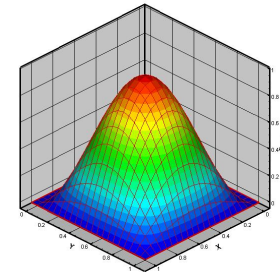


Итерационный метод

n=5



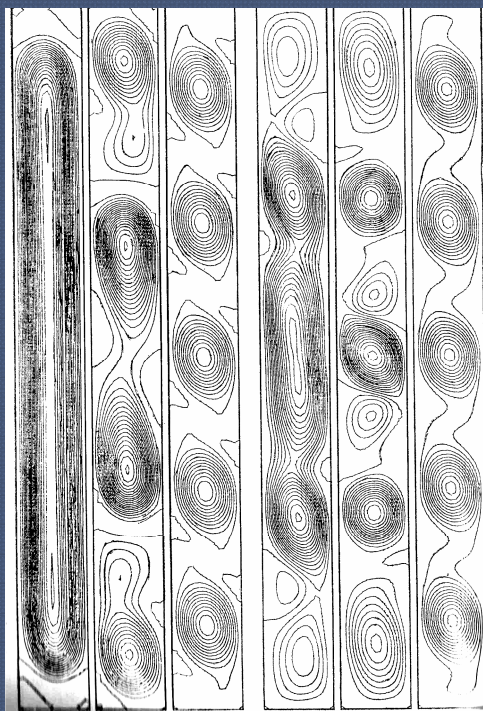
n=40



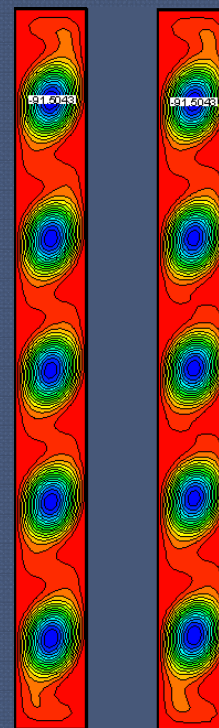
# Сравнение

| Размер сетки | Метод    | Итерации | Погрешность          | Время (с) |
|--------------|----------|----------|----------------------|-----------|
| 40x40        | МПН      | 656      | $6 \cdot 10^{-4}$    | 1.698     |
|              | Прогонка | 324      | $6 \cdot 10^{-4}$    | 0.588     |
| 80x80        | МПН      | 4524     | $1.5 \cdot 10^{-4}$  | 30.703    |
|              | Прогонка | 1553     | $1.5 \cdot 10^{-4}$  | 8.626     |
| 160x160      | МПН      | 20248    | $3.9 \cdot 10^{-5}$  | 579.981   |
|              | Прогонка | 7258     | $3.9 \cdot 10^{-5}$  | 162.354   |
| 320x320      | МПН      | 101938   | $9.76 \cdot 10^{-6}$ | 14827.217 |
|              | Прогонка | 33237    | $9.76 \cdot 10^{-6}$ | 2827.456  |

# Конвекция при малых числах $Pr$



$$\tau = 10^{-6} \quad \tau = 10^{-5}$$



В.И. Полежаев

Математическое моделирование конвективного  
теплообмена на основе уравнений Навье-  
Стокса

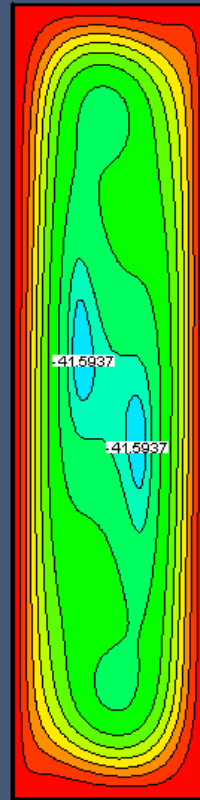
Расчет на основе КГД уравнений

# Структура переходного режима линии тока

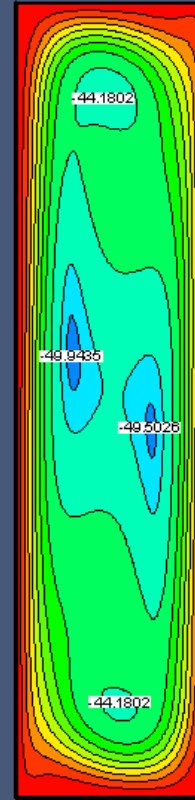
$Gr = 100\ 000$



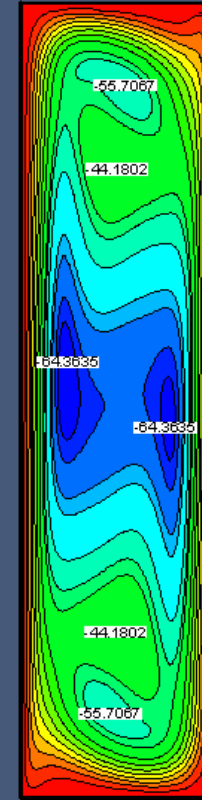
$Gr = 200\ 000$



$Gr = 400\ 000$

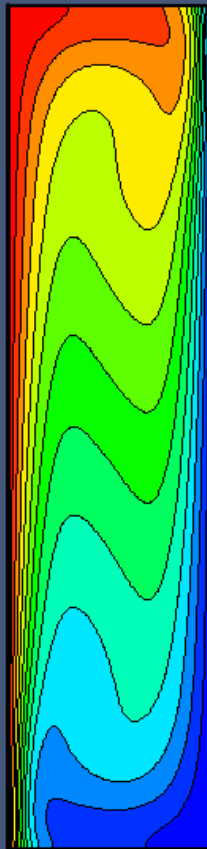


$Gr = 1\ 000\ 000$

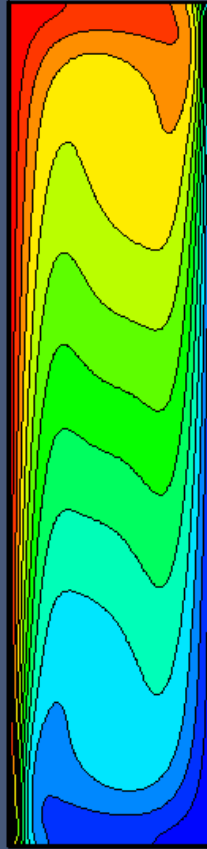


# Структура переходного режима изотермы

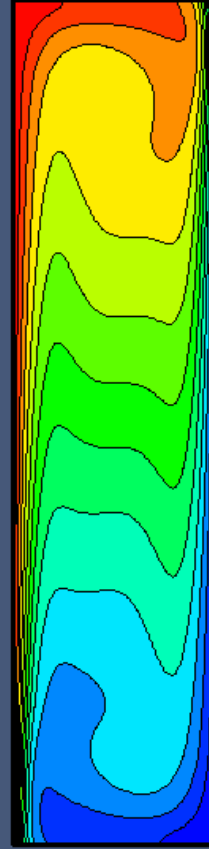
$Gr = 100\ 000$



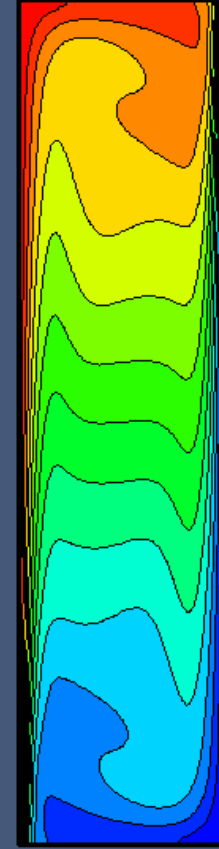
$Gr = 200\ 000$



$Gr = 400\ 000$



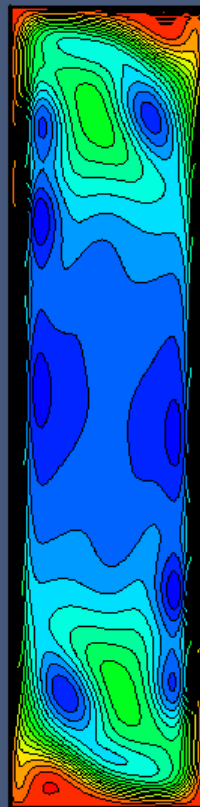
$Gr = 1\ 000\ 000$



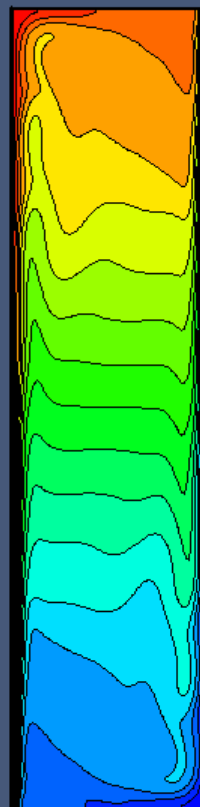
# Нестационарное течение

---

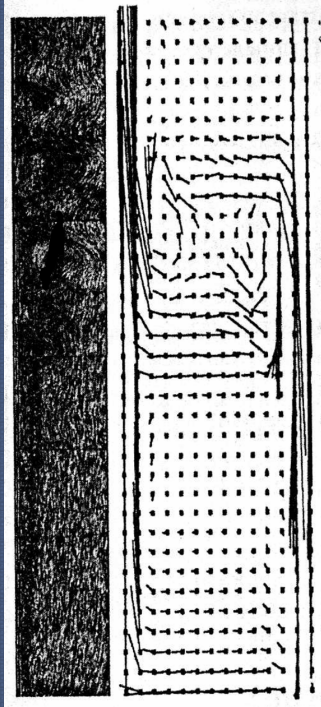
$Gr = 5\,000\,000$



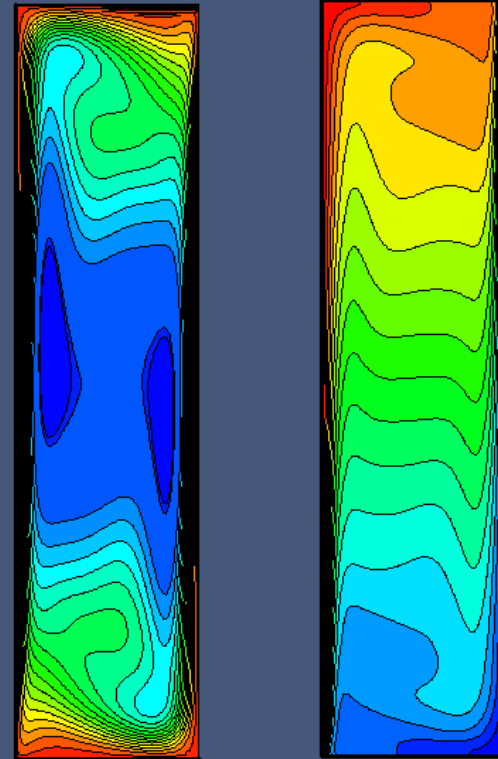
$Gr = 5\,000\,000$



# Результаты эксперимента



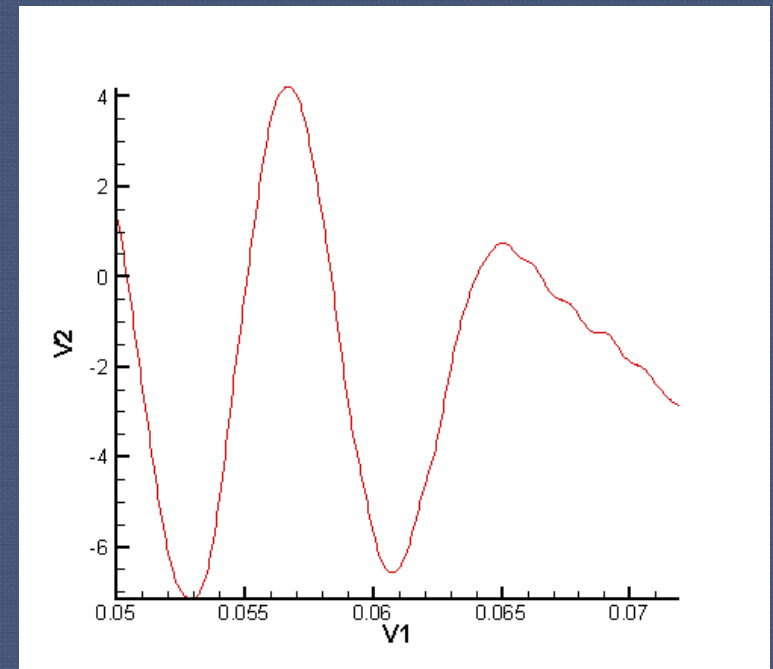
В.С. Бердников, В.А. Гришков  
Ламинарно-турбулентный переход в  
свободноконвективном пограничном слое  
и теплоотдача вертикальных стенок



Осредненное течение при  $Gr = 10^7$   
Результат численного эксперимента

# В дальнейшем планируется:

- исследовать зависимость теплообмена от структуры течения в нестационарном режиме,
- вывести закон изменения скорости из данных вычислительных экспериментов
- и т. д.



# Заключение

---

- Создан комплекс программ на основе квазигидродинамической системы уравнений в приближении Буссинеска, позволяющий моделировать нестационарное конвективное движение в плоском вертикальном слое вязкой несжимаемой жидкости.
- С его помощью исследован переход от стационарного ламинарного режима конвекции к нестационарному режиму при значении числа Прандтля  $Pr = 0.71$ .

---

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

[gorelits@unislabs.com](mailto:gorelits@unislabs.com)