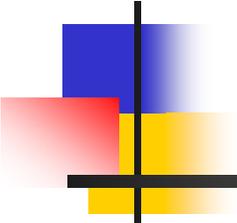


Экономичный метод решения уравнения  
переноса в 2D цилиндрической и 3D  
гексагональной геометриях на основе  
метода квазидиффузии



---

Е.Н.Аристова<sup>1,2</sup>

Д.Ф.Байдин<sup>2</sup>

*<sup>1</sup>ИГМ им. М.В.Келдыша РАН*

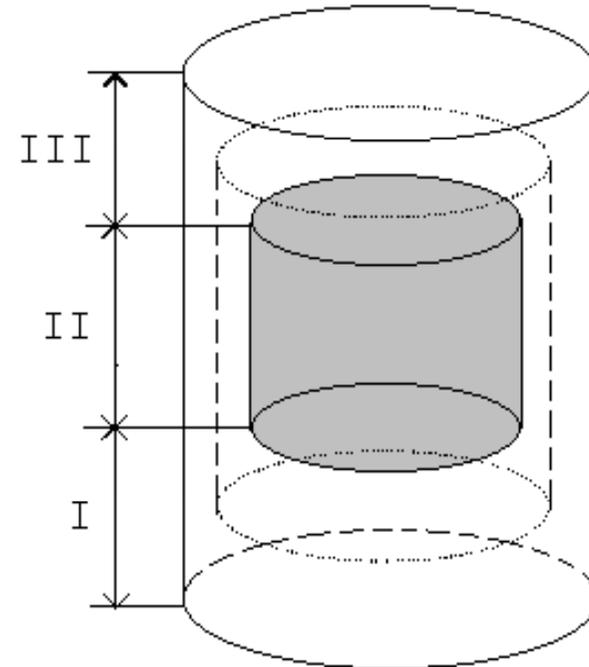
*<sup>2</sup>Московский физико-технический институт  
(государственный университет)*

## Вычислительные проблемы решения уравнения переноса

- Большое количество независимых переменных, от которых зависит функция распределения
- Сложная зависимость коэффициента поглощения среды от энергии фотона/частицы (и параметров среды)
- В задачах с сильной анизотропией рассеяния: наличие дельтаобразной особенности индикатрисы рассеяния преимущественного рассеяния вперед; это приводит к длительным итерациям по интегралу столкновений
- Сильная нелинейность задачи, обусловленная взаимным нелокальным влиянием среды на прохождение излучения и излучения на параметры среды
- Сложность построения численных методов, обладающих хорошей точностью на грубых сетках и сохраняющих качественные особенности решений уравнения переноса

## Двумерная модель реактора

- Необходимость решения уравнения переноса возникает в задачах взаимодействия излучения с веществом и в нейтронной (реакторной) физике
- На рисунке справа изображена двумерная модель реактора с АЗ помеченной серым цветом и белыми слоями защиты
- Метод квазидиффузии позволяет существенно сократить число итераций по рассеянию, а также эффективно решать задачи типа распространения света в веществе совместно с уравнениями энергии для вещества, нестационарные уравнения выгорания и реакторной кинетики совместно с уравнениями для плотности скалярного нейтронного потока



# Метод квазидиффузии

**Уравнение переноса  
для обычных  
или лебеговских групп**

*Осреднение по углам*

**Групповые уравнения  
квазидиффузии**

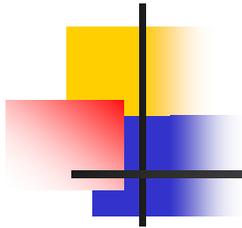
*Осреднение по энергии*

**Осредненные (сумматорные)  
уравнения квазидиффузии**

Групповые коэффициенты  
квазидиффузии и коэффициенты  
граничных условий

Осредненные коэффициенты  
квазидиффузии и граничных  
условий

## Уравнение переноса в 2D и 3D геометриях



2D:

$$\Omega_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Omega_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Omega_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \alpha \Phi = Q,$$

$$\Omega_z = \cos \theta, \quad \Omega_r = \sin \theta \cos \varphi, \quad \Omega_\varphi = -\sin \theta \sin \varphi, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Переход к переменным Владимирова позволяет переписать уравнение переноса в виде, содержащем только две пространственные производные:

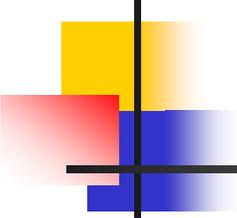
$$\cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \alpha \Phi = Q.$$

3D:

$$\Omega_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \alpha \Phi = Q,$$

$$\Omega_z = \cos \theta, \quad \Omega_x = \sin \theta \cos \varphi, \quad \Omega_y = \sin \theta \sin \varphi, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

## Интегрирование по углам (вычисление коэффициентов)


$$D_{ij}^p = \int_{\bar{\Omega}} \Omega_i \Omega_j \Phi^p d\bar{\Omega} / \int_{\bar{\Omega}} \Phi^p d\bar{\Omega}$$

$$\begin{aligned} p(t, x, y, z) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho(\theta, \varphi) \Phi(t, x, y, z, \gamma, \varphi) \sin \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \rho(\gamma, \varphi) \Phi(t, x, y, z, \gamma, \varphi) d\gamma \end{aligned}$$

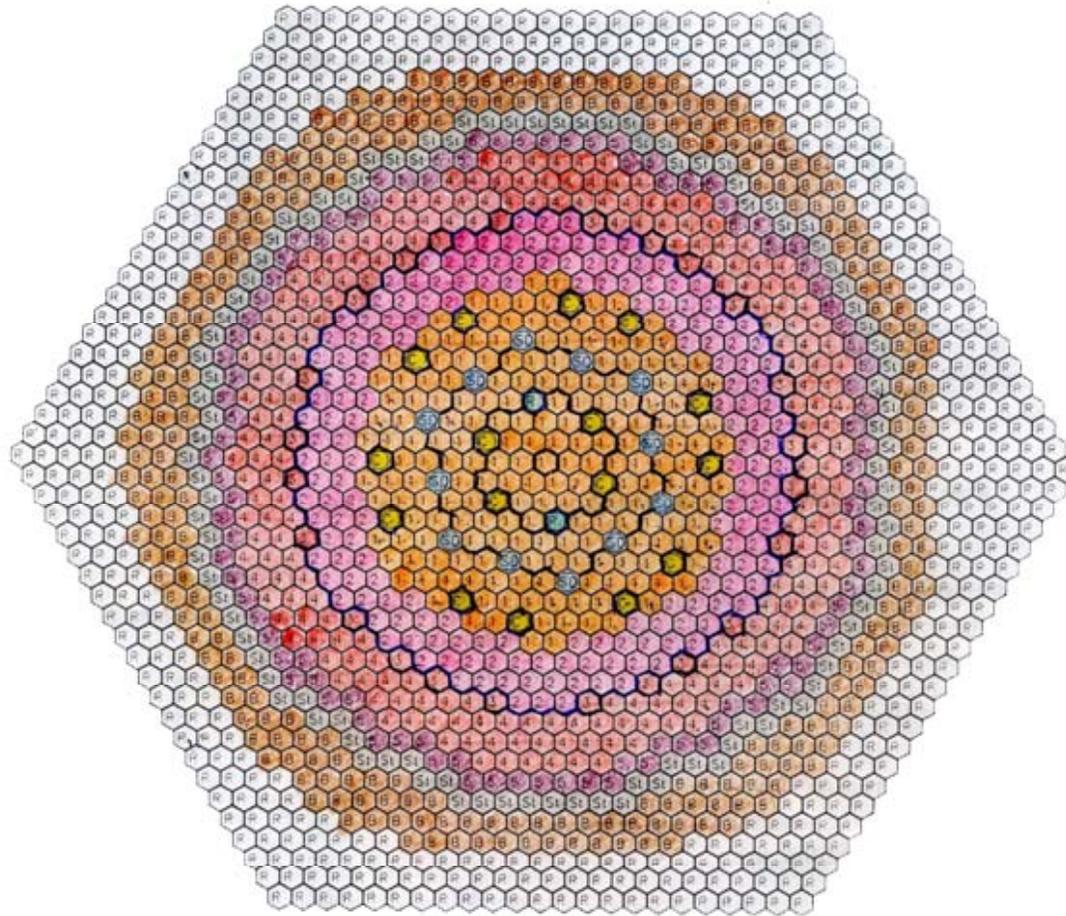
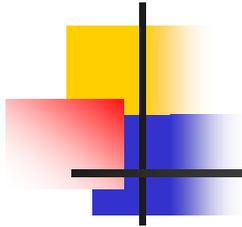
$$\Phi \approx a_k (\mu - \mu_k)^2 + b_k (\mu - \mu_k) + c_k$$

$$P = 2 \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{q=0}^{N_q} A_q B_k$$

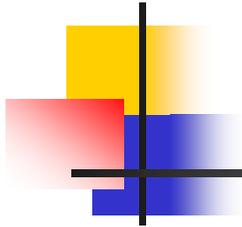
Интеграл по  $\gamma$  вычисляется в предположении кусочно-постоянной аппроксимации

После вычисления  $\Phi$  на новом слое для заданных углов  $\theta$  и  $\varphi$  делаются вклады в интегральные суммы

# Картограмма тестовой модели АЗ реактора БН-800

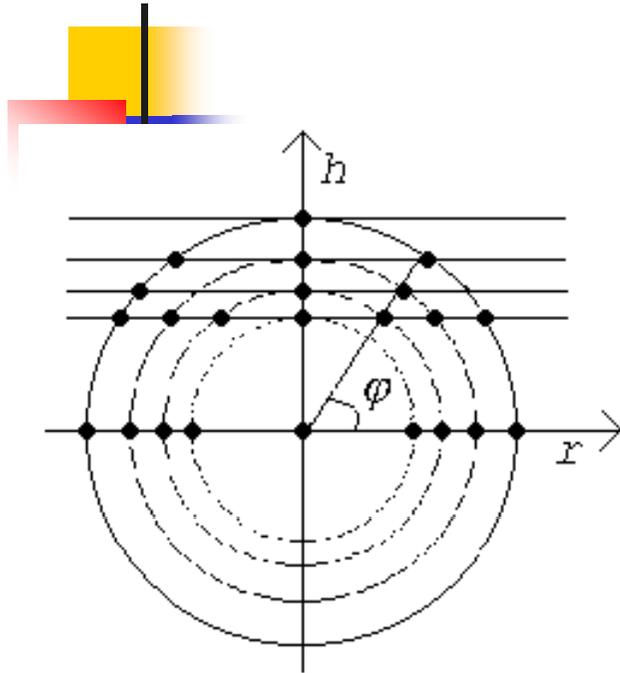


## Переход от 2D модели к полной 3D



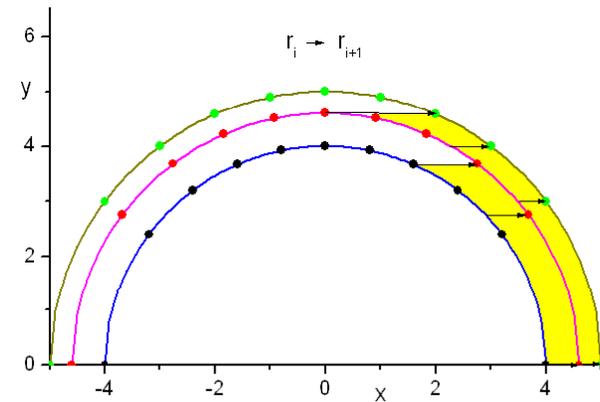
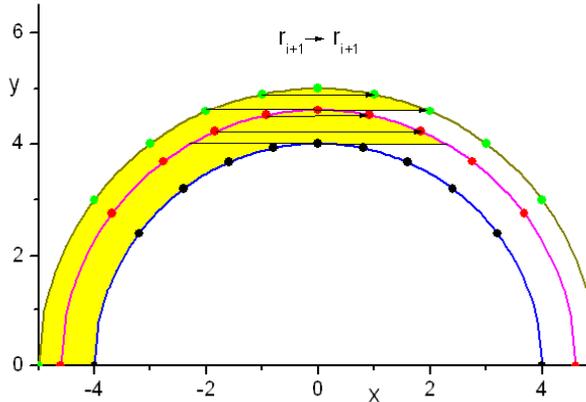
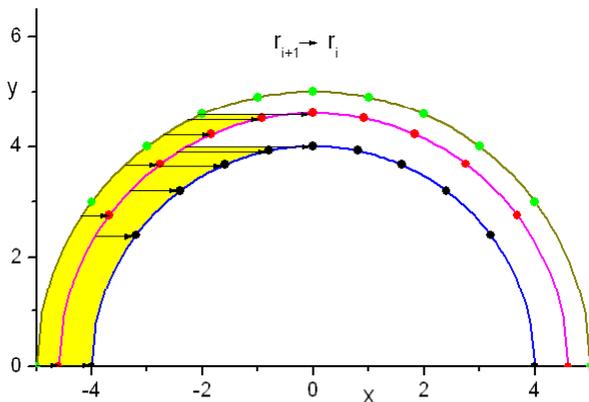
- Увеличение времени расчета
- Естественные симметрии
- Более полное отражение геометрии АЗ
- Сетка угловая жестко связана с пространственной
- Отсутствие удвоения сетки в плоскости поперечного сечения для расчета коэффициентов
- Отсутствие интерполяции и равномерность сеток по пространству и углам (сетки строятся независимо)

# Классическая и неклассическая сетки по $\mu = \cos\varphi$ в 2D

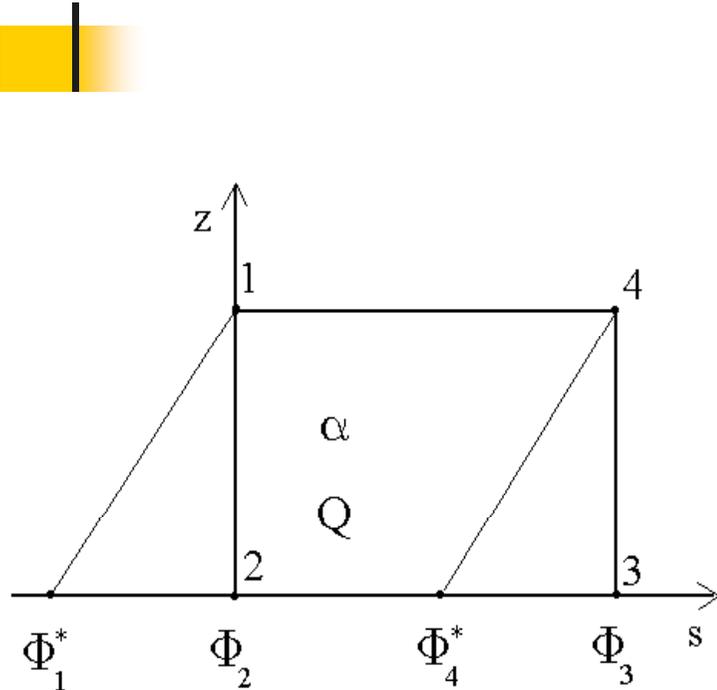


Классический вариант: взаимно однозначная связь пространственной и угловой сеток – излишняя подробность и неудобство.

Альтернативный вариант: свобода выбора угловой сетки для каждого радиуса вызывает усложнение алгоритма обхода ячеек и необходимость введения интерполяции по обобщенной угловой координате  $\mu = \cos\varphi$



## Характеристический метод

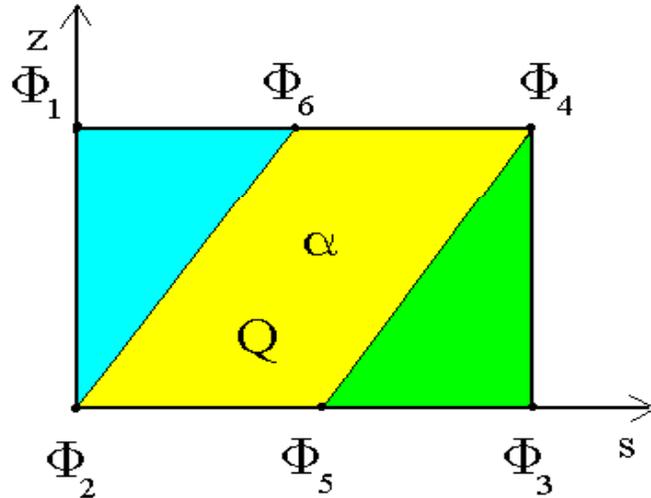
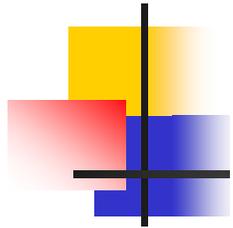


Значение  $\Phi_4^*$  определяется квадратичной интерполяцией по величинам  $\Phi_1^*, \Phi_2, \Phi_3$ , где  $\Phi_1^*$  находится решением обратной задачи переноса с параметрами  $\alpha$  и  $Q$ , приписанными данной ячейке

Окончательное значение в узле 4:

$$\Phi_4 = \Phi_4^* \exp(-\alpha dl) + Q / \alpha (1 - \exp(-\alpha dl))$$

## Консервативно-характеристический метод



$$F_{23}(0) = \Phi_2$$

$$F_{23}(ds) = \Phi_3$$

$$\int_0^{ds} F_{23}(\xi) d\xi = W_{23}$$

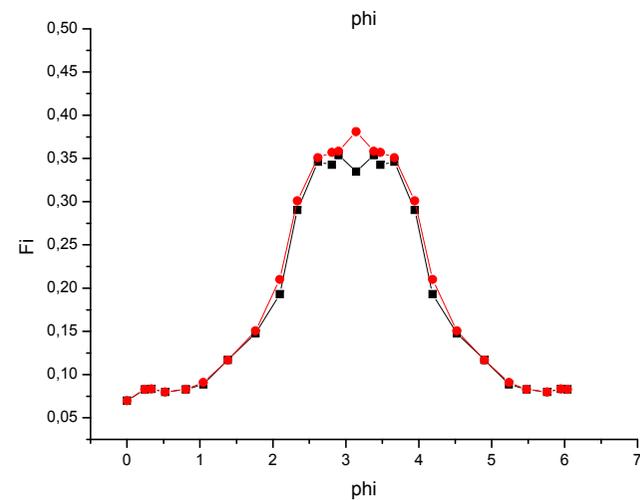
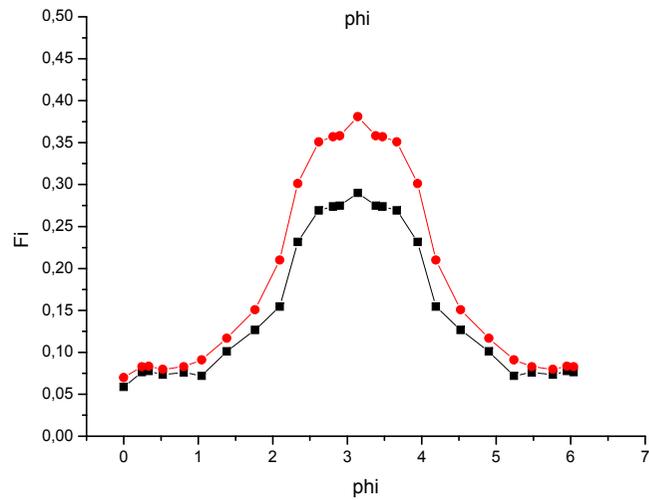
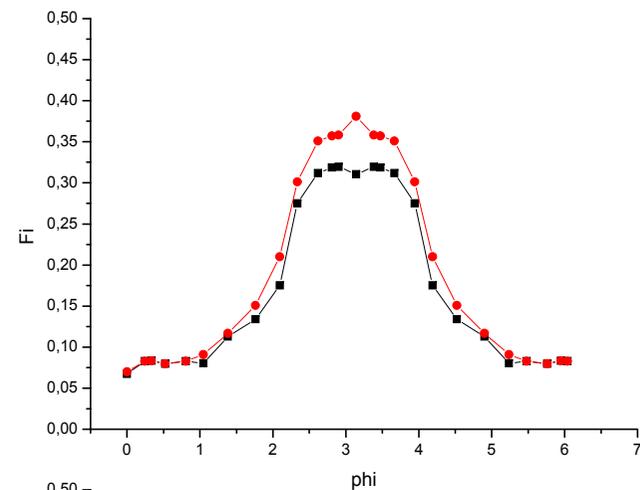
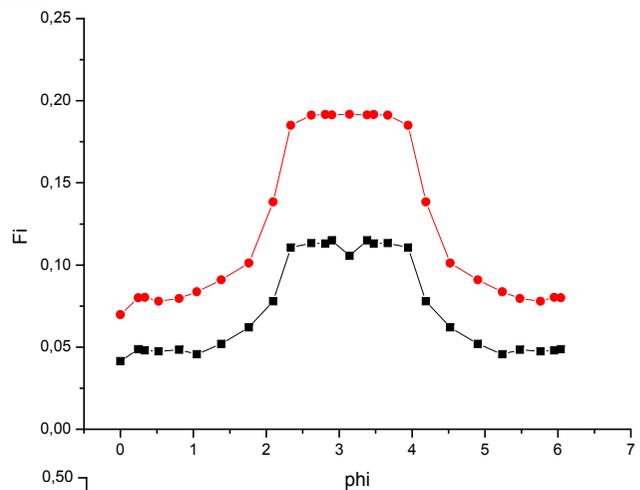
$$W_{64} = W_{25} \exp(-\alpha dl) + Q / \alpha (1 - \exp(-\alpha dl))(s_5 - s_2)$$

$$W_{34} = \operatorname{ctg} \theta \exp(-\alpha ds / \sin \theta) \int_{ds - \operatorname{tg} \theta dz}^{ds} F_{23}(\xi) \exp(\alpha \xi / \sin \theta) d\xi +$$

$$+ Q / \alpha (dz + \cos \theta / \alpha (\exp(-\alpha dl) - 1))$$

$$W_{16} = \operatorname{tg} \theta \exp(-\alpha dl) \int_0^{dz} F_{21}(\xi) \exp(\alpha \xi / \cos \theta) d\xi + Q / \alpha (\operatorname{tg} \theta dz + \sin \theta / \alpha (\exp(-\alpha dl) - 1))$$

# Сравнение характеристического и консервативно-характеристического методов в 3D геометрии



## Результаты численных расчетов для 2D и 3D на тестовой задаче с точным решением.

2D:

Сетка метода Владимирова (классическая)

- Характеристический  $< 1$
- Консервативно-характеристический  $\sim 2$

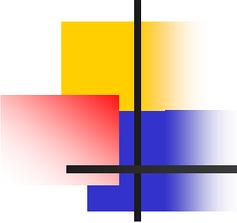
Альтернативная сетка

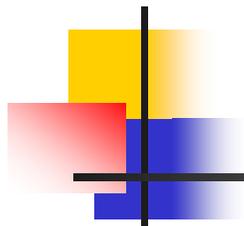
- Характеристический  $< 0,5$
- Консервативно-характеристический  $\sim 1$

3D:

- Характеристический  $> 1$
- Консервативно-характеристический  $\sim 2$

## Заключение

- 
- Задача распределения выходящего потока по граням решена точно в рамках заданной интерполяции функции распределения по стороне расчетной ячейки.
  - Консервативный метод решения уравнения переноса позволяет значительно повысить точность расчетов как в 2D для обеих пространственных сеток, так и в 3D.
  - В 3D оба метода расчета уравнения в ячейки показывают более высокую эффективность.
  - Ошибка консервативно-характеристического метода в 3D мала даже на грубых сетках, преимущество метода более ярко выражено.
  - Промышленный вариант 2D схемы применяется в реальных расчетах для реактора на быстрых нейтронах, а также в задачах переноса света; 3D схема готовится для внедрения в промышленные расчеты.
  - Использование трехмерного расчета позволит в полной мере учитывать геометрию АЗ.



**Спасибо за внимание!**