

# О ДВУХ ИДЕЯХ ВОСХОДЯЩИХ К АНТИЧНОСТИ И О БОЛЬШИХ СТЕПЕНЯХ БИНОМА ВТОРОГО (НЕЛИНЕЙНОГО ВИДА)

**А. В. Юркин**  
**ИМПБ РАН**

Первая идея – арифметический треугольник. Упоминания об арифметическом треугольнике встречаются задолго до его описания

Б. Паскалем. Так, например, такая схема треугольника встречается в трудах средневекового китайского - Яна Хуэя, у Омар Хайама, а также в более ранних описаниях у индийских математиков.

Вторая идея – параксиальные или Гауссовы пучки. Описание возможности движения атомов по траекториям, отклоненных от прямой, приводится у древнегреческого философа Эпикура и позднее – у древнеримского философа Тита Лукреция.

В настоящей работе мы фактически объединяем эти две идеи, т. е. рассматриваем ветвящуюся систему лучей, наклоненных под малыми углами к оси и друг к другу.

**<http://www.a-yurkin.ru/>**



## Свойства

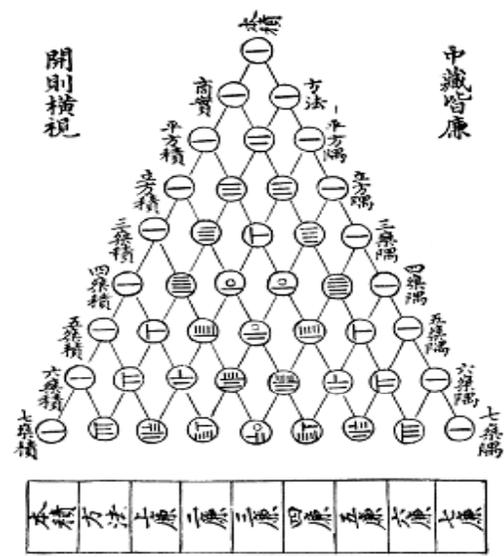
- Второе число каждой строки соответствует её номеру.
- Третье число каждой строки равно сумме номеров строк, ей предшествующих.
- Третье число каждой строки является [треугольным](#) <sup>[4]</sup>
- Четвертое число каждой строки является [тетраэдрическим](#) <sup>[4]</sup>
- Сумма чисел  $n$ -й восходящей диагонали, проведенной через строку треугольника с номером  $n - 1$ , есть  $n$ -е [число Фибоначчи](#). <sup>[4]</sup>

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots = F_n.$$

- Если вычесть из центрального числа в строке с чётным номером соседнее число из той же строки, то получится [число Каталана](#). <sup>[4]</sup>
- Сумма чисел  $n$ -й строки треугольника Паскаля равна  $2^n$ . <sup>[4]</sup>
- Простые делители чисел треугольника Паскаля образуют симметричные самоподобные структуры.
- Если в треугольнике Паскаля все нечётные числа окрасить в чёрный цвет, а чётные - в белый, то образуется [треугольник Серпинского](#).

# История

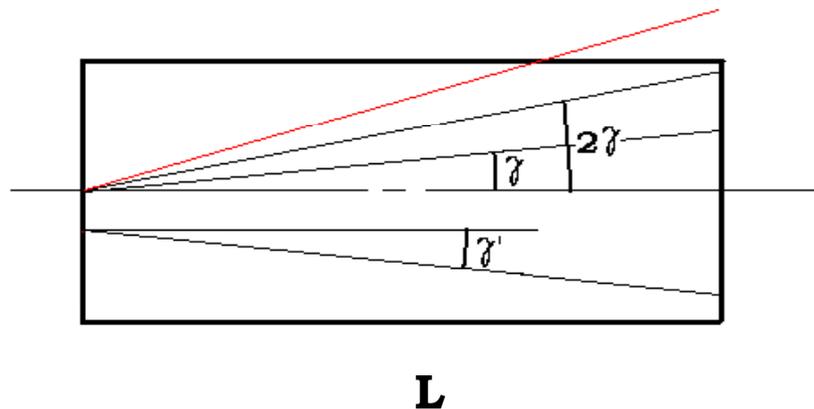
## 圖方蔡七法古



Треугольник Яна Хуэя в китайском средневековом манускрипте, 1303 год

Первое упоминание треугольной последовательности биномиальных коэффициентов под названием *men-prastaara* встречается в комментарии индийского математика [X века Халагодхи](#) к трудам другого математика, [Пингалы](#). Треугольник исследуется также [Омаром Хайямом](#) около [1100 года](#), поэтому в Иране эту схему называют треугольником Хайяма. В [1303 году](#) была выпущена книга «Яшмовое зеркало четырёх элементов» китайского математика [Чжу Шичзе](#), в которой был изображен треугольник Паскаля на одной из иллюстраций; считается, что изобрёл его другой китайский математик, [Ян Хуэй](#) (поэтому китайцы называют его треугольником Яна Хуэя). На титульном листе учебника арифметики, написанном в [1529 году](#) Петром Апианом, астрономом из Ингольштадского университета, также изображён треугольник Паскаля<sup>[1]</sup>. А в [1653 году](#) (в других источниках в [1655 году](#)<sup>[1]</sup>) вышла книга Блеза Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике».<sup>[3]</sup>

## Траектории лучей под малыми углами – параксиальное (Гауссово) приближение



Длина лучей  $\approx L$ , т. к. углы – малые;  **$\text{Sin } \gamma \approx \gamma$** ,  **$\text{Sin } 2\gamma \approx 2\gamma$** , и т. д.

## **История**

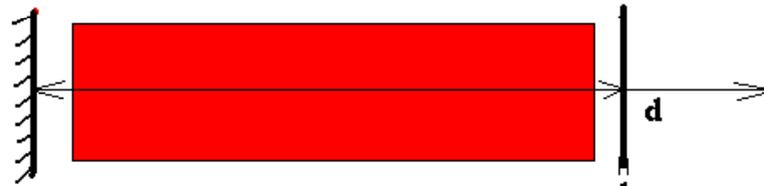
### **Движение атомов по Демокриту**



### **По Эпикуру (Тит Лукреций)**



## Лазерный резонатор с плоско-параллельными зеркалами



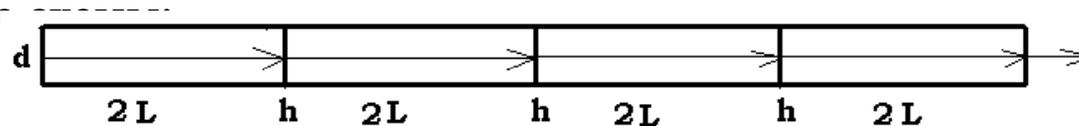
Где  $L$  и  $d$  – длина и апертура резонатора,  $h$  – толщина выходного зеркала (среда с другими оптическими свойствами, например, это может быть сферическое зеркало).

Плоско-параллельный резонатор характеризуется числом Френеля:

$$F = d^2 / 4\lambda L, \text{ где } \lambda \text{ – длина волны.}$$

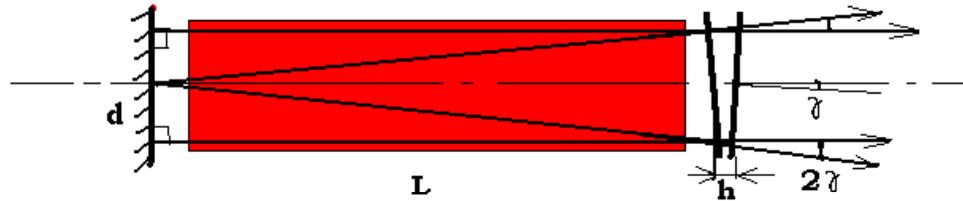
При  $F \gg 1$ , расчеты можно проводить в геометрическом приближении. В этом случае распространении световых волн изображают с помощью лучей.

Для исследования резонаторов иногда используют эквивалентные оптически



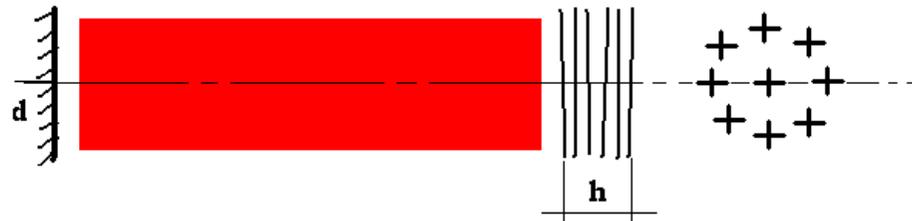
Лучи в этом случае имеют только одно направление распространения.

## Квазирезонатор (плоский случай)



Две полупрозрачные пластины выходного зеркала наклонены на углы  $\pm\gamma$  к оси.

## Многолепестковое зеркало.



$k$  пластин наклонены на углы  $\gamma$  к оси и развернуты на углы  $\beta=2\pi k$  вокруг оси.

Квазирезонатор, по аналогии с числом Френеля  $F$  для плоско-параллельного резонатора характеризуется безразмерным числом:

$$m=d/4 \gamma L.$$

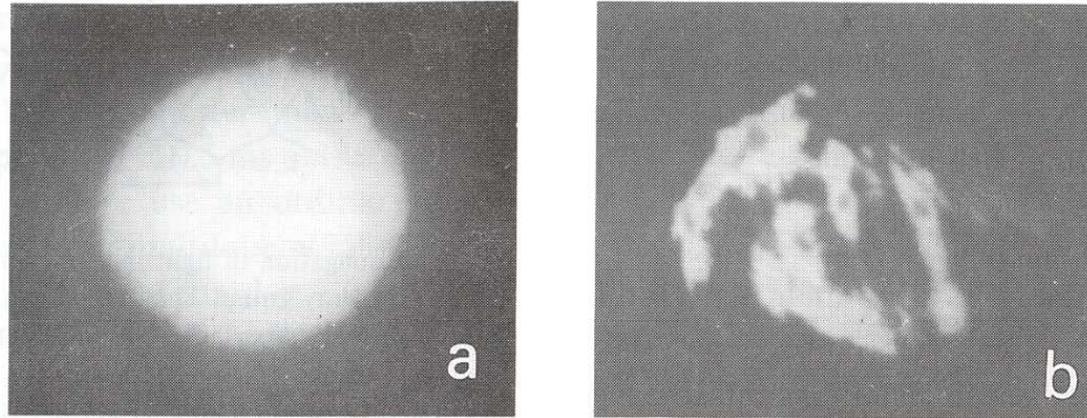
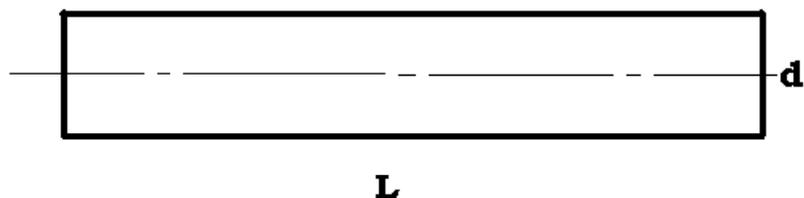


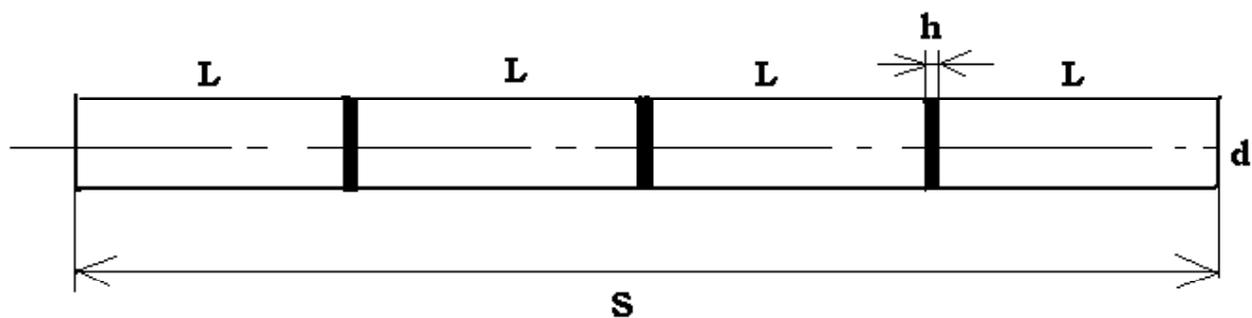
Fig. 2. Images of the spots formed by laser beam in the far-field zone: (a) by the laser equipped with mirrors 1 and 2 (Fig. 1a), the maximum spot diameter is 3.5 mm, the intensity is highest in the center; (b) by the same laser with plane but inclined mirrors 2 and 4 (Fig. 1a).

## Оптически однородная среда



Стороны прямоугольника  $L \gg d$

## «Цепочка» прямоугольников



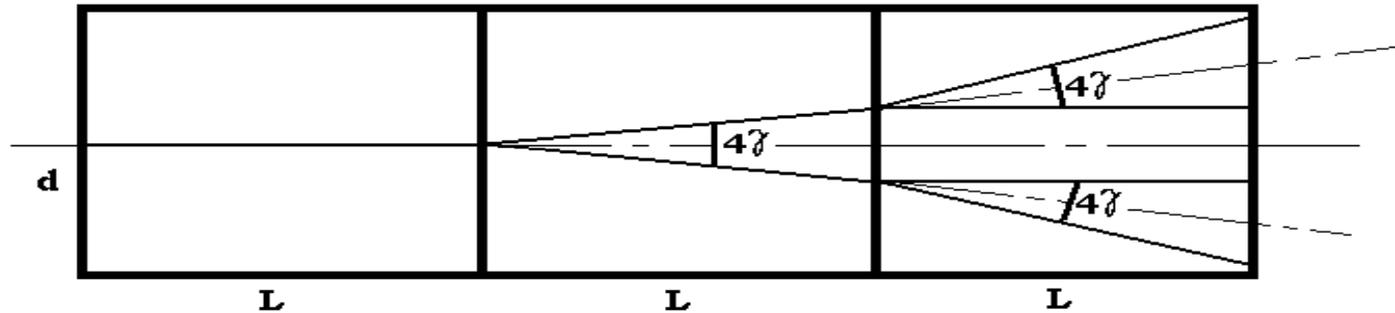
$S \gg L$  ,  $d \gg h$  , т.е.:

$S \gg L \gg d \gg h$  ,

где  $h$  – толщина среды с другими оптическими свойствами.

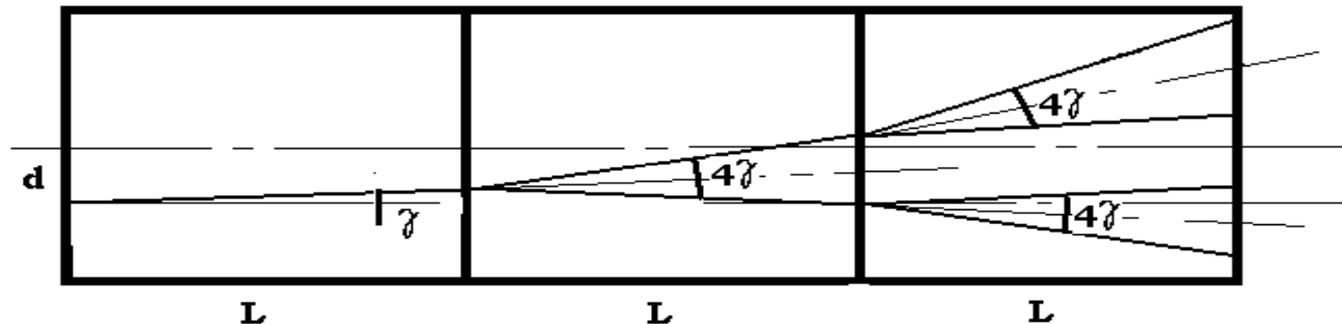
## Расщепления (бифуркация) лучей

При последовательном прохождении сред лучи симметрично расщепляются.



В результате построения образуется группа лучей под углами  $\pm 2n\gamma$  к оси, где  $n=0, 1, 2, \dots$

Или



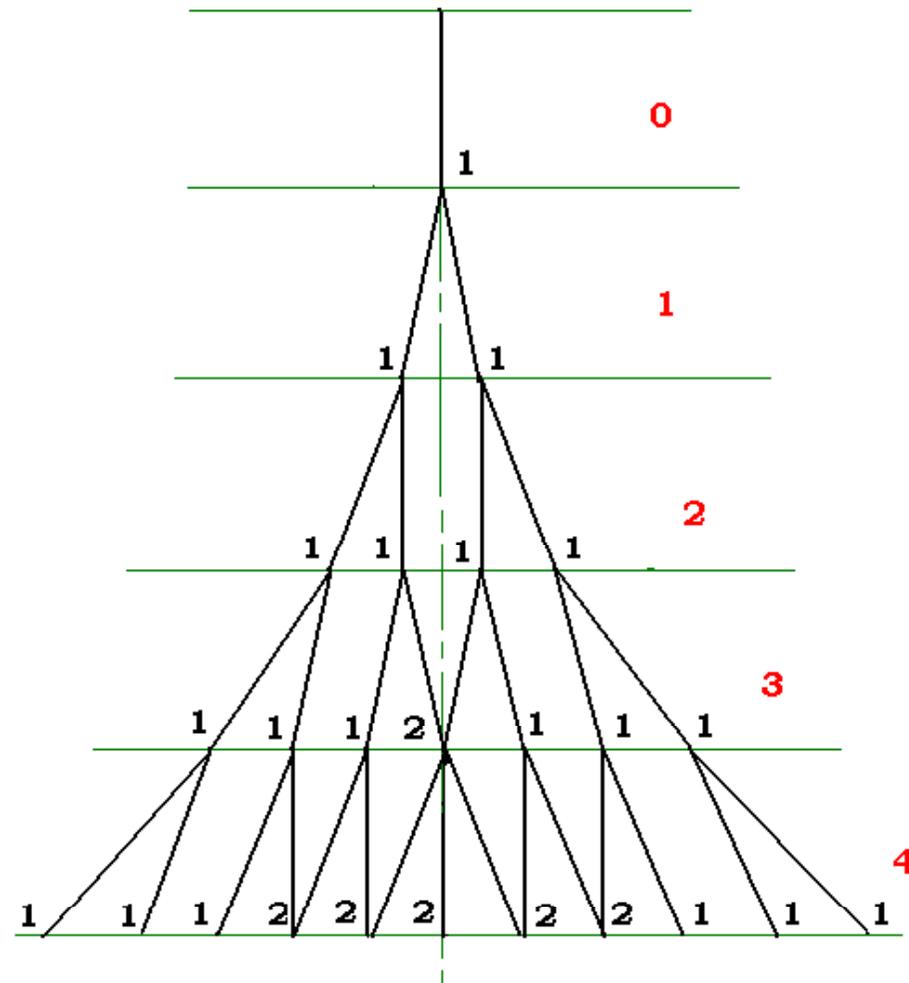
группа лучей под углами  $\pm(2n + 1)\gamma$  к оси.

В общем случае образуются группы лучей под углами  $\pm(2n + l)\gamma$  к оси,

где  $0 \leq l \leq 1$  в зависимости от начального угла наклона, т. е.

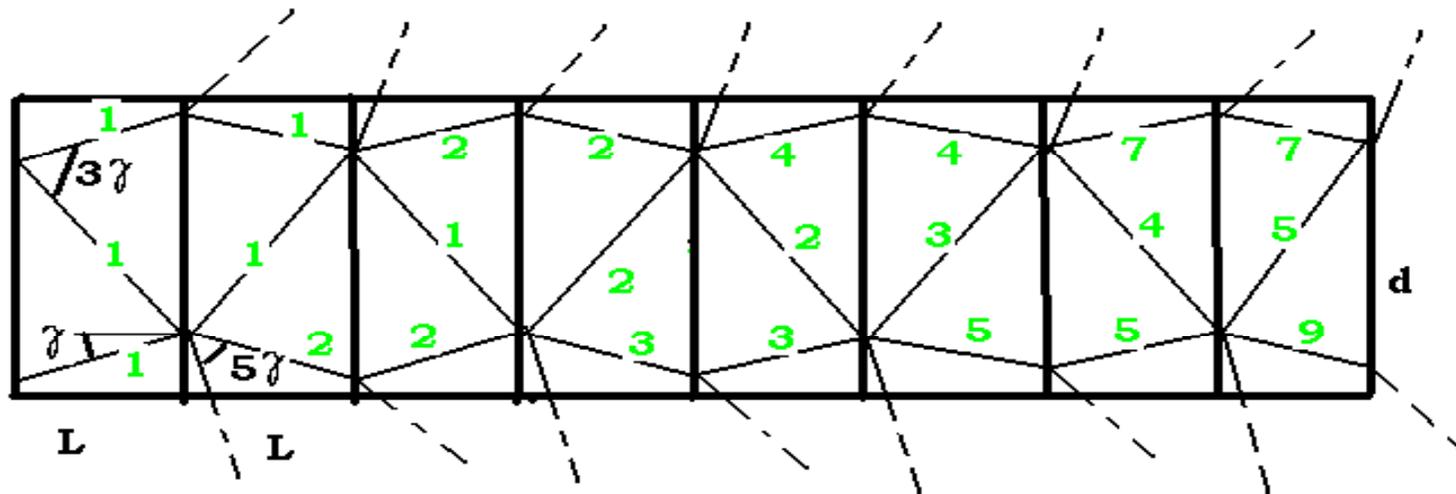
величины  $l$ .

**Траектории в квазирезонаторе на первоначальном этапе.**



## На последующих этапах

Часть лучей выходят за пределы прямоугольников



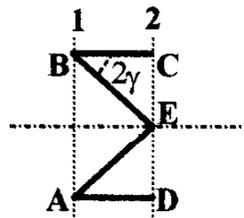
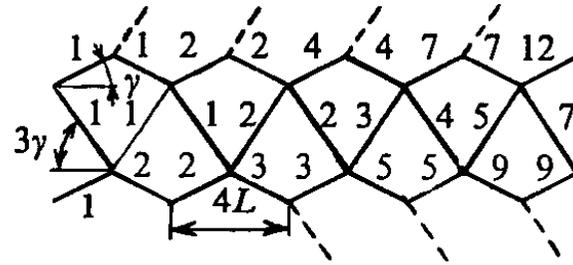
Угловое распределение описывается рядами:

**2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, ... - для  $\gamma$  и**  
**1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, ... - для  $3\gamma$**

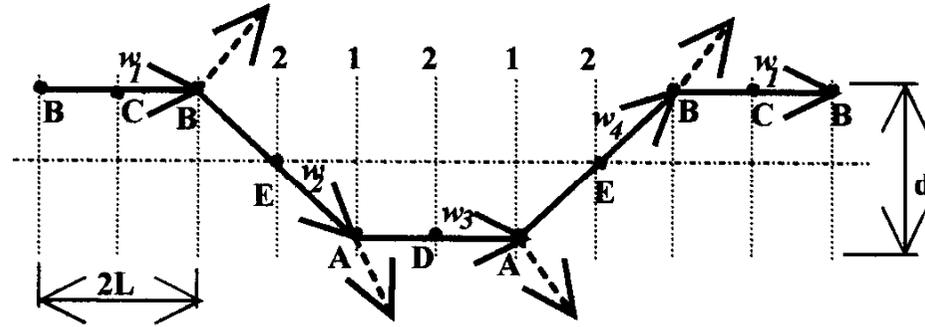
Члены этих рядов выражается формулой:

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$$

Можно подсчитать относительное число лучей под углами  $\gamma$  и  $3\gamma$  после бесконечного числа проходов.



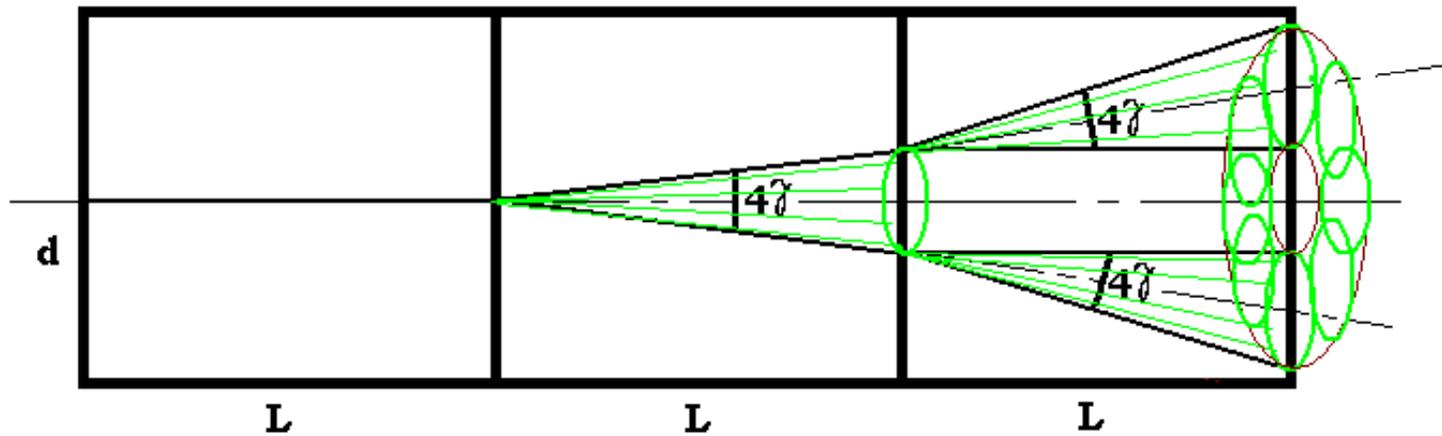
(a)

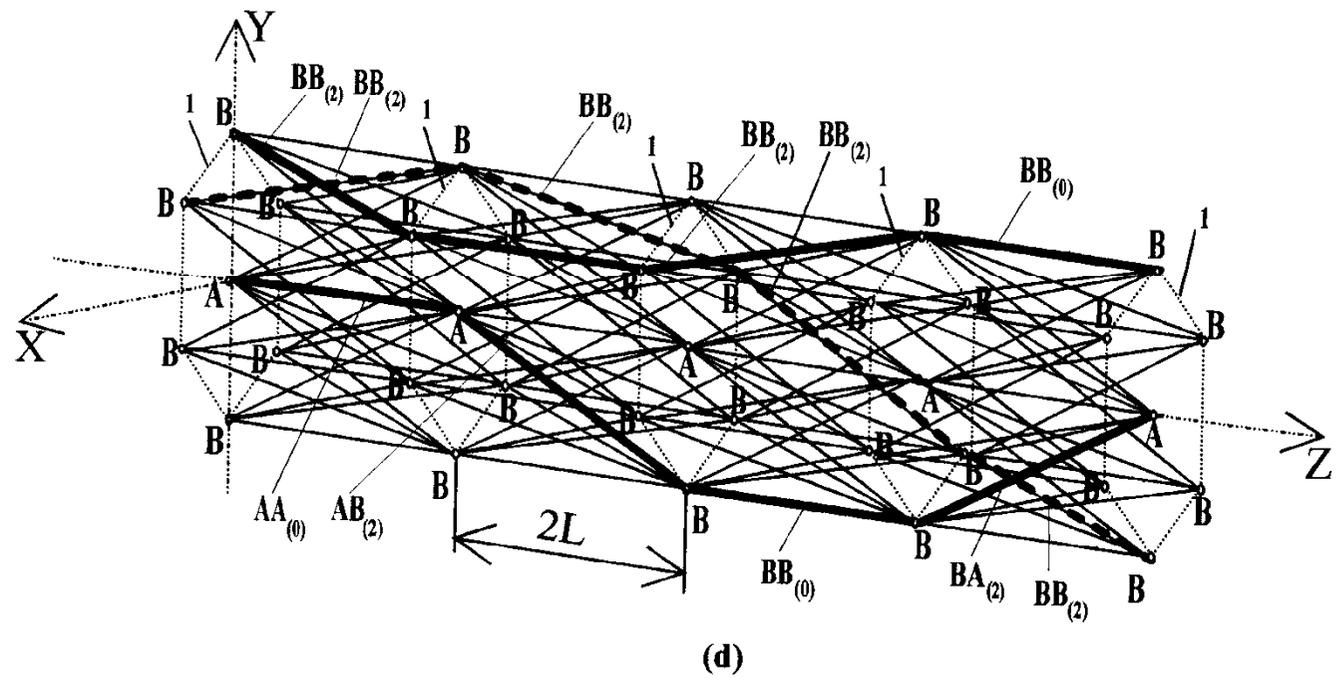
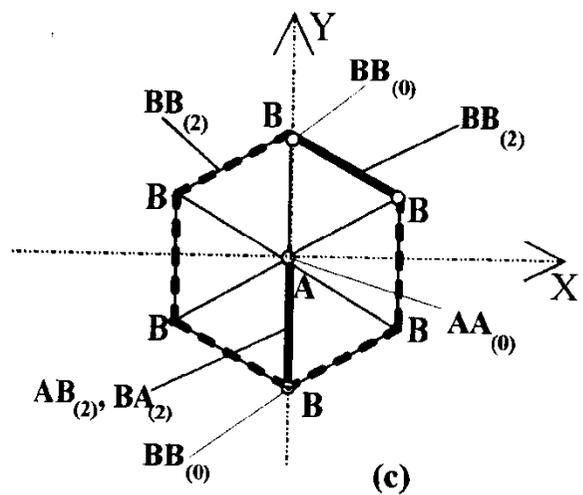


(b)

## Трёхмерное построение распределение групп лучей

представляет собой осесимметричную систему полых конусов,  
а среда - цилиндр

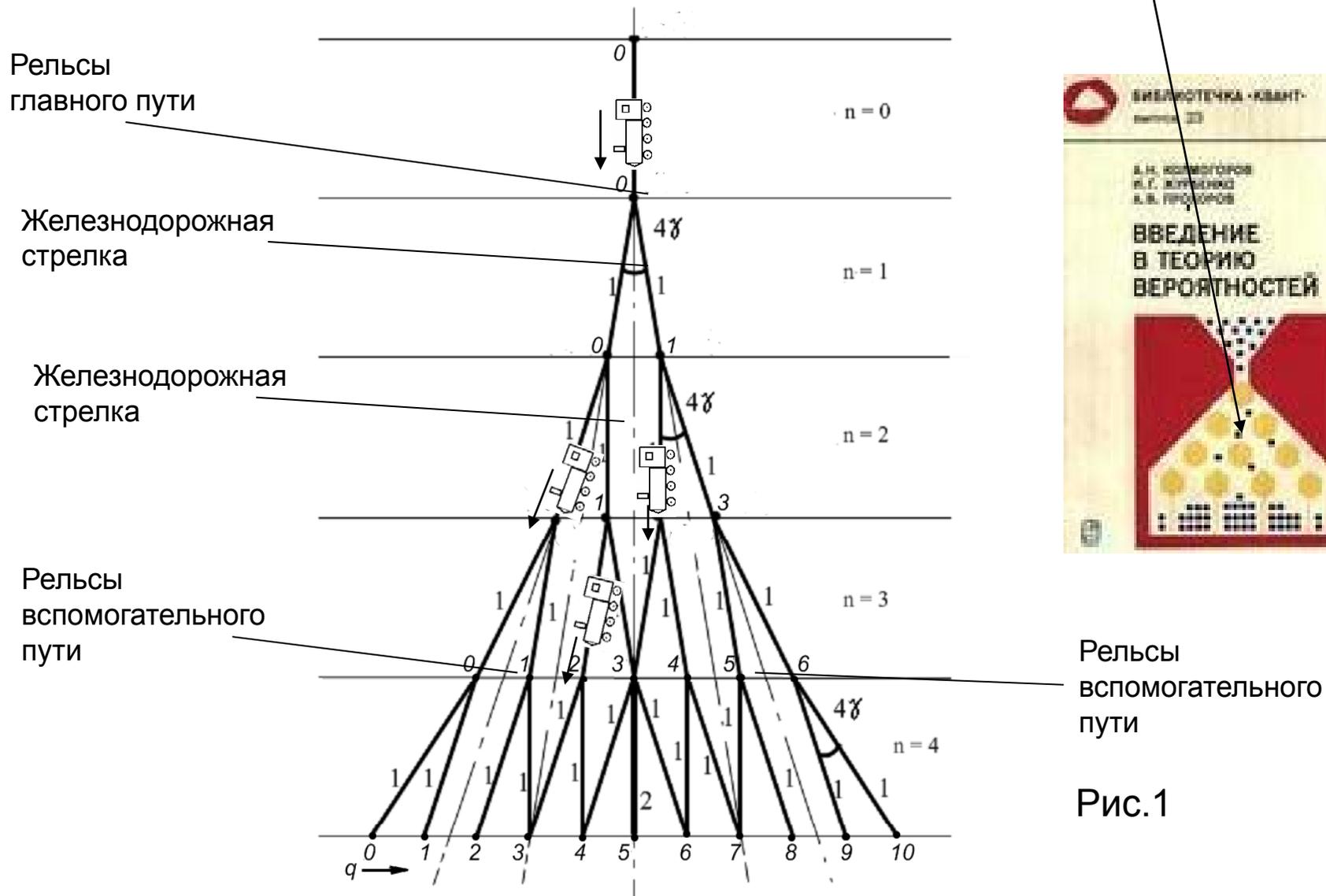




# «ПАРОВОЗЫ ПРИБЫВАЮТ НА УЗЛОВУЮ СТАНЦИЮ» -

-другая возможная интерпретация системы лучей – по аналогии с «ДОСКОЙ ГАЛЬТОНА», иллюстрирующей нормальное распределение

[Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. Введение в теорию вероятностей. Москва: Наука, 1995.]



Рельсы  
вспомогательного  
пути

Рис.1

## **Бифуркация лучей и биномиальное распределение**

В работах [3, 5, 6] мы исследовали ветвящиеся системы лучей, состоящие из групп лучей, соединенных в ломаные траектории, состоящие из звеньев. Рассмотрим систему лучей подробнее. Лучи наклонены на малые углы. Вся группа лучей может быть образована из одного луча при последовательном построении.

На Рис. 1 показана часть плоской системы [3] для группы лучей, наклоненных на углы  $\pm 2k\alpha$ .

После каждого прохода света, где (Рис. 1) лучи разветвляются надвое при отражении от многолепесткового зеркала. Начальный проход (без расщепления) будем считать нулевым. Распределение световой энергии, выходящей вдоль лучей, пропорционально количеству лучей. Первые три прохода энергия распределяется между лучами поровну.

Часть лучей параллельны друг другу, т.е. наклонены на одинаковые углы. Лучи распространяются вдоль звеньев.

Начиная с четвертого прохода, некоторые лучи накладываются друг на друга, распределение энергии между лучами становится неравномерным. В общем случае число лучей больше или равно числу звеньев. На Рис. 1 число лучей помечено цифрами, а точки ветвления лучей помечены курсивом.

## Треугольник Паскаля

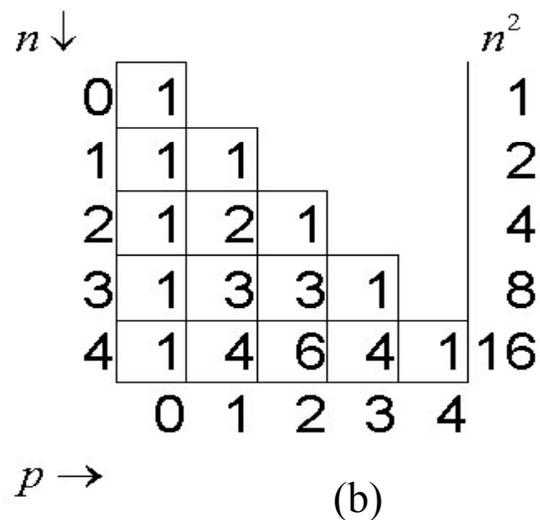
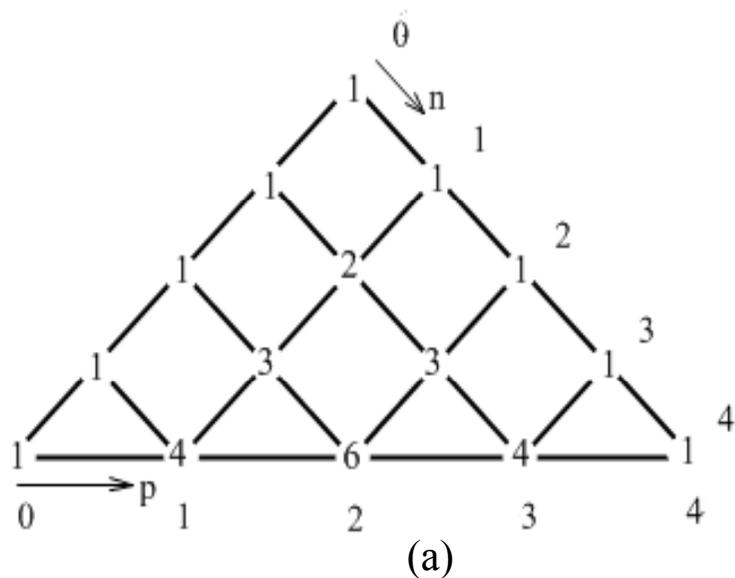


Рис.2

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad , \text{ или} \quad \binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$$

Числа в каждом из нижних рядов в треугольнике Паскаля – биномиальные коэффициенты – являются суммой двух чисел верхнего ряда. Сумма коэффициентов для  $n$ - степени бинома равна  $2^n$ , приведена в колонке справа на Рис. 2b.

## Нелинейная арифметическая пирамида

Известны трехмерные обобщения треугольника Паскаля в виде линейных арифметических пирамид, например, тетраэдра [7].

Для наших вычислений также построим трехмерную числовую таблицу, а именно нелинейную арифметическую пирамиду (Рис. 3), состоящую из двумерных слоев  $n$  (Рис.4), где  $n=1, 2, 3, \dots$

Найдем соответствие между системой лучей на Рис. 1 и системой чисел, расположенных в нелинейной арифметической пирамиде на Рис. 3, 4.

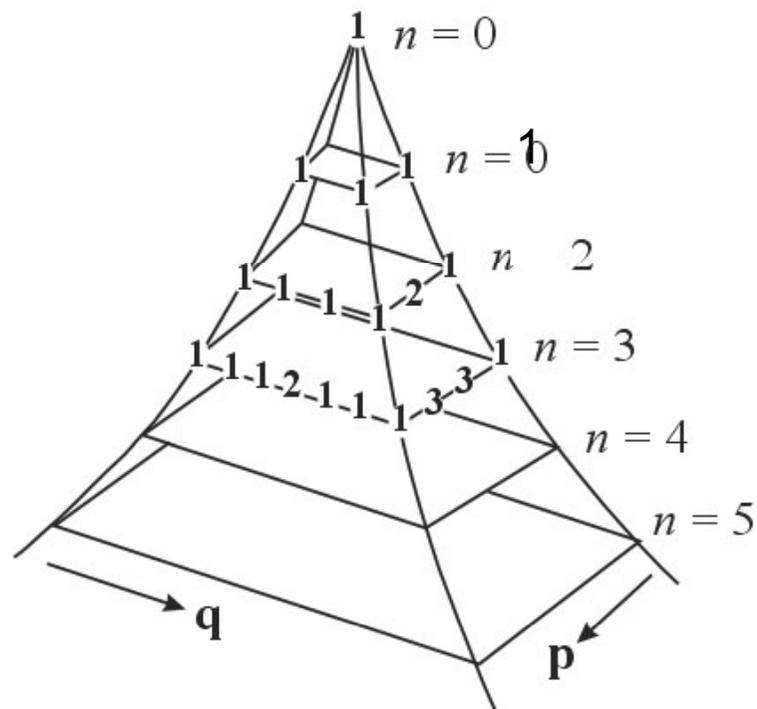


Рис.3

Порядковый номер  $n$ -слоя пирамиды, начиная с вершины, соответствует проходу  $n$  лучей (Рис. 1),  $p$  – номер ряда, а  $q$  – номер столбца прямоугольника слоя  $n$  пирамиды. С увеличением числа  $n$ , величина  $p$  растет линейно:  $0 \leq p \leq n$ , а  $q$  – нелинейно:  $0 \leq q \leq n(n+1)/2$  (Рис. 3, 4). Номер  $p$  соответствует величине наклона лучей (Рис. 1) на углы, кратные  $2\gamma$ , номер  $q$  соответствует номерам точек ветвления лучей (Рис. 1).

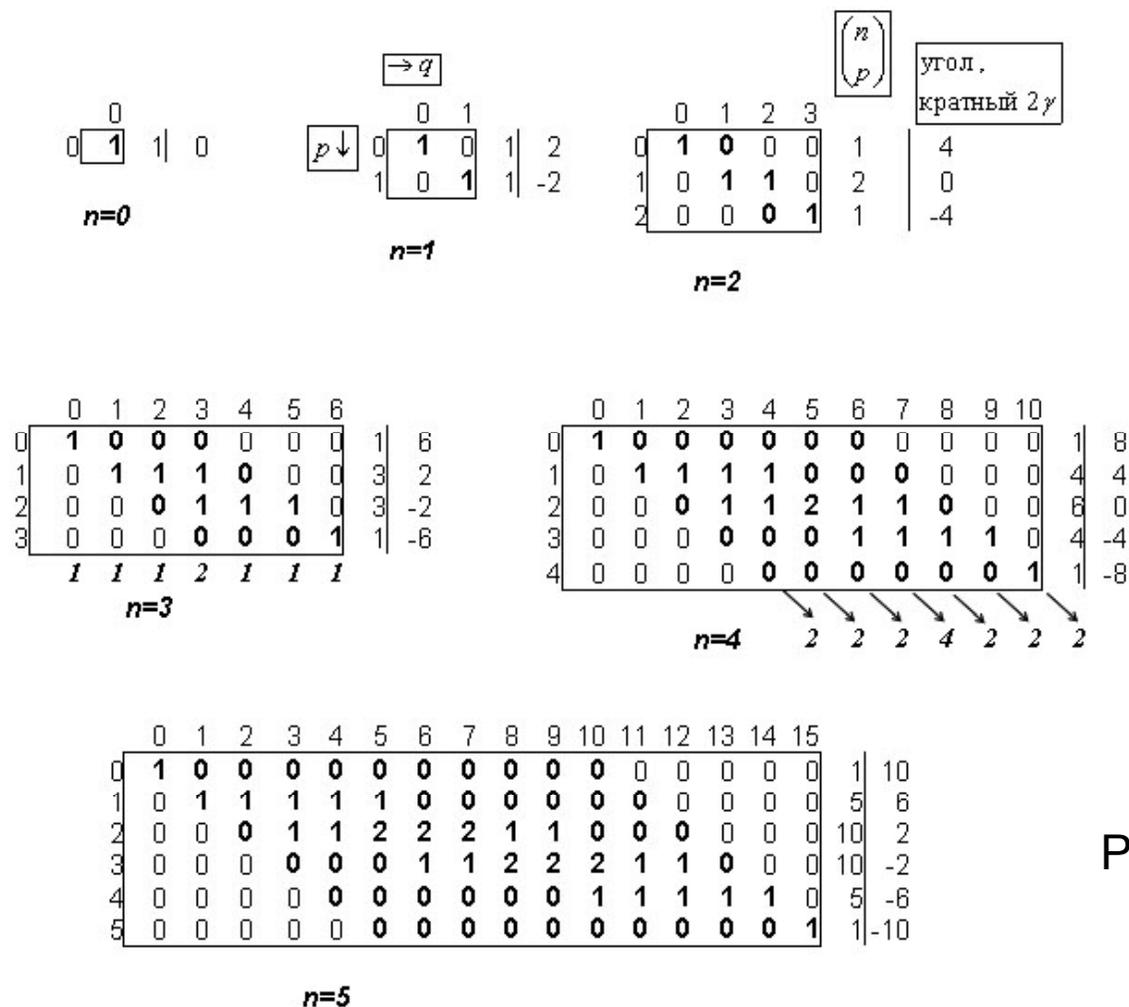


Рис.4

Рис. 4. Слои нелинейной арифметической пирамиды для различных значений  $n$ .  $p$  – номера рядов, а  $q$  – номера столбцов для каждого из слоев. В первой колонке цифр за пределами прямоугольников справа – суммы чисел рядов  $p$ , равные биномиальным коэффициентам, во второй колонке справа приведены значения углов наклона лучей для каждого прохода  $n$  (Рис.1), кратные углам  $\pm 2\gamma$  или, точнее,  $2(n - 2p)\gamma$ . Для  $n = 3$  и  $n = 4$  показаны суммы чисел в вертикальных и наклонных ( $45^\circ$ ) столбцах, соответственно; эти суммы приведены курсивом в строках ниже прямоугольников.

Обозначим как  $\begin{pmatrix} n \\ p \\ q \end{pmatrix}$  число, расположенное в  $n$ -слое пирамиды в ряду  $p$  и столбце  $q$ .

Тогда правило последовательного заполнения числами нашей трехмерной таблицы (Рис. 3, 4), начиная с вершины пирамиды, будет:

$$\begin{pmatrix} n \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \\ q-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \\ q-p \end{pmatrix}$$

Например, для первого слоя ( $n = 1$ ) для  $p = 0, q = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \text{ т.к. } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ а } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Если первый слой уже заполнен, то для второго слоя ( $n = 2$ ), например, для  $p = 0, q = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{т.к.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{а} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и т. д.}$$

## Нелинейные арифметические треугольники

На Рис. 4 для  $n=3$  и  $n=4$  показаны курсивом суммы чисел в вертикальных и наклоненных под углом  $45^\circ$  столбцах, соответственно; эти суммы приведены в строках ниже прямоугольников; они показывают общее число лучей, входящих и выходящих из точек ветвления.

Выпишем теперь отдельно все суммы чисел, расположенные в вертикальных столбцах для всех прямоугольников, изображенных на Рис. 4. Расположим ряды этих сумм построчно (аналогично Рис. 2b) – у нас получится нелинейный треугольник первого вида (Рис. 5).

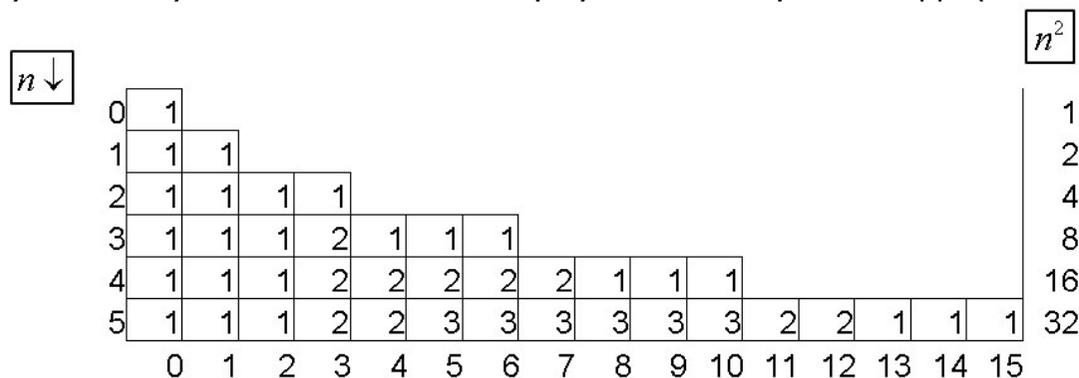


Рис.5

Рис. 5. Нелинейный арифметический треугольник первого вида, в колонке справа – суммы чисел в рядах. Эти числа соответствуют числу лучей, приходящих в точки ветвления  $q$  (Рис. 1) под различными углами при проходе  $n$ .

Обозначим как:  $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$  число, расположенное в  $n$ -ряду и  $q$ -столбце нелинейного треугольника.

Тогда правило последовательного заполнения числами нелинейного треугольника, начиная с вершины, будет:

$$\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ q-n \end{bmatrix} \quad \text{Пример: } n = 1, q = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

Выпишем теперь отдельно все суммы чисел, расположенные в наклонных столбцах для всех прямоугольников, изображенных на Рис. 4. Расположим ряды этих сумм построчно – у нас получится нелинейный треугольник второго вида (Рис. 6).

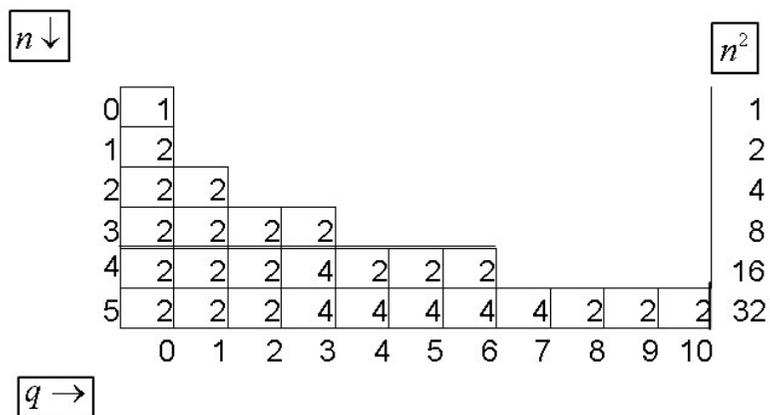


Рис.6

Рис. 6. Нелинейный арифметический треугольник второго вида, в колонке справа – суммы чисел в рядах. Эти числа соответствуют числу лучей, выходящих из точек (Рис. 1) ветвления **q** под различными углами при проходе **n**.

Обозначим как  $\begin{Bmatrix} n \\ q \end{Bmatrix}$  число, расположенное в **n**-ряду и **q**-столбце нелинейного треугольника второго вида.

Тогда правило последовательного заполнения числами нелинейного треугольника, начиная с вершины, будет:

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ q-n \end{Bmatrix} \quad \text{Пример:} \quad n+1=1, q=0 \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 2$$

Выражение  $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ q-n \end{bmatrix}$  соответствует известной формуле [8] разбиения чисел на слагаемые. Число (12) показывает, сколькими способами можно разбить число  $q$  на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел  $1, 2, \dots, n$ , при этом порядок слагаемых не учитывается, а все слагаемые различны.

Так, например, число  $7$  можно разбить на слагаемые  $1, 2, 3, 4, 5$  тремя способами:  $7 = 3 + 4$ ,  $7 = 2 + 5$ ,  $7 = 1 + 2 + 4$ ; т.е. для нашего случая для  $n = 5, q = 7$ :

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 \quad (\text{Рис. 5}), \text{ и т. д.}$$

Число различных углов, кратных  $2\gamma$ , на которые наклонены лучи при каждом проходе  $n$  (Рис. 1) и высота  $p+1$  прямоугольника слоя  $n$  (Рис. 3, 4) равно  $n+1$ , т. е. выражается натуральным рядом:  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n+1$  и совпадает с количеством чисел в ряду  $n$  (Рис. 2) треугольника Паскаля.

Число точек  $q$  ветвления лучей после каждого прохода  $n$  (Рис. 1) и длина  $q+1$  прямоугольника слоя  $n$  (Рис. 4) выражается рядом:  $1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots, [n(n+1)/2]+1$ , совпадает с количеством чисел в ряду  $n$  нелинейного треугольника первого вида.

Число звеньев  $N$ , вдоль которых распространяются лучи  $K$  при каждом проходе  $n$  (Рис. 1), и количество натуральных чисел в пределах прямоугольника слоя  $n$  (Рис. 4) выражается рядом:  $1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots, [n(n+5)/6]+1$ .

Особенностью приведенных выше последних трех рядов является то, что разность чисел ряда, приведенного в п. 5, является рядом, приведенным в п. 4, а разность чисел ряда, приведенного в п. 4, является рядом в п. 3:

$$1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, \dots$$

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots$$

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

**Юркин А. В.**

Институт Общей физики им. А. М Прохорова РАН, e-mail: yurkin@fpl.gpi.ru

## **ТРАЕКТОРИИ ЛУЧЕЙ, БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ НОВОГО ВИДА И ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ**

Предложен новый алгоритм построения нелинейного арифметического треугольника на основе численного моделирования и двоичной системы счисления. Показано, что числа, заполняющие нелинейный арифметический треугольник, могут являться биномиальными коэффициентами нового вида. Проведена аналогия с биномиальными коэффициентами, вычисляемыми с помощью треугольника Паскаля. Дана геометрическая интерпретация биномов различных видов в при рассмотрении ветвящихся систем лучей.

### **Введение**

Обычно лазерные генераторы состоят из активной среды, усиливающей свет, и резонатора, состоящего из двух плоскопараллельных зеркал: одного зеркала со 100% отражением, второго – полупрозрачного [1].

В работах [2, 3] было предложено зеркало нового типа – многолепестковое. Такие зеркала состоят из многих полупрозрачных плоских пластин, наклоненных к оси лазера на малый угол  $\gamma$  и развернутых симметрично вокруг оси. Луч света отражается конически от многолепесткового в виде полого конуса, точнее, в виде множества линий, расположенных на боковой поверхности конуса. Для наших расчетов принимается, что сами зеркала являются тонкими, а все лучи наклонены под малыми углами к оси – т. е. мы используем для расчетов гауссово [4, 5], или параксиальное приближение. Такой подход широко используется в расчетах оптических приборов, например, телескопов. В плоском (двумерном) случае луч, отражаясь от нашего зеркала, расщепляется надвое.

Для описания процессов в лазерах, оснащенных резонаторами, обычно используются волновые или геометрооптические (лучевые)

дели и эквивалентные световодные схемы [1]. Отметим, что световая энергия, выходящая из лазера, пропорциональна числу лучей.

В лазере, оснащённом многолепестковым зеркалом, генерируются все частоты, возбуждаемые в активной среде, в отличие от лазера, оснащённого плоскопараллельными зеркалами, в котором генерация происходит только на резонансных частотах. Поэтому в работе [6] мы назвали лазерный резонатор, оснащённый многолепестковым зеркалом – квазирезонатором.

В работе [7] была предложена наглядная геометрооптическая модель на основе рассмотрения биномиального распределения для описания распространения света в лазере, снабжённом многолепестковым зеркалом.

В работе [8] были описаны нелинейная арифметическая пирамида и нелинейные арифметические треугольники и были предложены рекуррентные формулы для построения нелинейной арифметической пирамиды и нелинейных арифметических треугольников. В этой же работе показана физическая их интерпретация – описание процесса распространения света в лазерах, оснащённых многолепестковым зеркалом, приведены примеры из комбинаторики.

В настоящей работе мы исследуем нелинейный арифметический треугольник более подробно. Нами предложен новый алгоритм построения такого нелинейного арифметического треугольника, показана связь предложенного алгоритма, двоичной системы счисления и биномиальных коэффициентов различных видов. Дана геометрическая интерпретация биномов различных видов при рассмотрении траекторий лучей для двумерного случая.

## **1. Треугольник Паскаля и табличный алгоритм вычисления биномиальных коэффициентов**

### **1.1. Треугольник Паскаля**

Известно [9], что биномиальные коэффициенты  $\binom{n}{p}$  можно вычислять с помощью двумерной числовой таблицы – арифметического треугольника Паскаля, в котором числа расположены послойно рядами (Рис. 1):

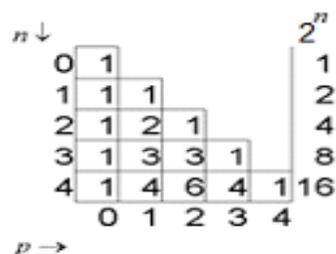


Рис. 1. Арифметический треугольник Паскаля (линейный),  $n$  – порядковый номер ряда,  $p$  – порядковый номер числа в ряду; в колонке справа – суммы чисел в ряду.

Треугольник Паскаля строится в соответствии с рекуррентной формулой:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad (1)$$

где  $n$  – степень бинома, а  $p$  – порядковый номер числа в горизонтальном ряду и  $0 \leq p \leq n$ .

Числа в каждом из нижних рядов в треугольнике Паскаля – биномиальные коэффициенты – являются суммой двух чисел верхнего ряда. Сумма коэффициентов для  $n$ -степени бинома равна  $2^n$ , приведена в колонке справа на Рис. 1.

**Пример 1.1.** Числа в ряду (Рис. 1) для  $n = 3$ : 1, 3, 3, 1 – являются биномиальными коэффициентами.

### 1.2. Табличный алгоритм вычисления биномиальных коэффициентов

Будем строить наш алгоритм из следующих соображений. Известно, что при возведении бинома в степень  $n$ :  $(a + b)^n$  мы получаем многочлен, члены которого состоят из сомножителей  $a$  и  $b$ , где  $a$  и  $b$  – некоторые, например, действительные числа, а  $n = 1, 2, \dots$ .

Примем, что в общем случае сложение коммутативно, а умножение некоммукативно<sup>1</sup>. Тогда, например, при возведении бинома в куб ( $n = 3$ ), имеем:

<sup>1</sup> Примером системы чисел, в которой в общем случае, сложение коммутативно, а умножение некоммукативно, является совокупность квадратных матриц с фиксированным рангом.

$$(a + b)^3 = a a a_{(0)} + a a b_{(1)} + a b a_{(2)} + a b b_{(3)} + b a a_{(4)} + b a b_{(5)} + b b a_{(6)} + b b b_{(7)}. (2)$$

Для наглядности, в (2) мы пронумеровали члены многочлена. Порядковые номера  $m$  членов многочлена, где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , показаны в (2) в виде нижнего индекса в скобках.

Запишем полученный многочлен в виде таблицы, члены многочлена (2) расположим в виде вертикальных столбцов в рамке (Рис. 2):

$m \rightarrow$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	$k$
	a	a	a	a	b	b	b	b	1 ↓
	a	a	b	b	a	a	b	b	2
	a	b	a	b	a	b	a	b	3

Рис. 2. Табличная запись многочлена (2), члены многочлена расположены в вертикальных столбцах в рамке.

Числа (Рис. 2) над таблицей (над рамкой) соответствуют порядковому номеру  $m$ -столбца таблицы – члену многочлена (2), числа справа от рамки – номеру  $k$ -строки таблицы, где  $k = 1, 2, \dots$ .

Заменяем в Рис. 2 буквы  $a$  и  $b$  на числа  $0$  и  $1$ , соответственно (Рис. 3):

	$m \rightarrow$									
		0	1	2	3	4	5	6	7	
	3	0	0	0	0	1	1	1	1	1 $k$
↑	2	0	0	1	1	0	0	1	1	2 ↓
$l$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	3
$\Sigma$		0	1	1	2	1	2	2	3	
$\binom{n}{p}$		1	3		3				1	

Рис. 3. Табличная запись чисел в двоичном виде (счисления), числа расположены в вертикальных столбцах в рамке, состоят из  $0$  и  $1$ .

Последовательность единиц и нулей вертикальных столбцах на Рис. 3 можно рассматривать как числа, записанным в двоичном исчис

лении, эти же числа  $m$  в десятичном исчислении показаны на Рис. 3 над рамкой (таблицей), они же совпадают с числами над рамкой (таблицей) на Рис. 2. Числа  $k$  справа от рамки соответствуют номеру строки таблицы. Числа  $l$  слева от рамки соответствуют разрядам чисел в двоичном исчислении, где  $l = n - k + 1$ , в нашем случае увеличение разрядов  $l$  – снизу вверх (Рис. 3).

Просуммируем числа (т. е. просуммируем последовательности нулей и единиц) в вертикальных столбцах (Рис. 3) – их суммы  $\Sigma$  показаны в виде жирных цифр в первой строке под рамкой. Во второй строке под рамкой показано, насколько часто величины этих сумм встречаются: так, ноль встречается один раз, единица – три раза, двойка – три раза, тройка – один раз.

Эти числа (во второй строке под рамкой на Рис. 3),  $1, 3, 3, 1$ , равны биномиальным коэффициентам  $\binom{n}{p}$ , которые, как было показано выше в Примере 1.1, также можно вычислить с помощью выражения (1) для треугольника Паскаля, приведенного на Рис. 1.

Если умножение коммутативно, то некоторые (подобные) члены многочлена (2) можно складывать в соответствии со значениями биномиальных коэффициентов  $\binom{n}{p}$ . В данном примере ( $n = 3$ ) это члены  $m = 1, 2, 4$  и  $m = 3, 5, 6$ , составляющие вертикальные столбцы  $1, 2, 4$  и  $3, 5, 6$  таблицы на Рис. 2 (и в соответствии с таблицей на Рис. 3); следовательно, в выражении (2) подобные члены – это:

$$\begin{aligned} aab_{(1)} &= aba_{(2)} = baa_{(4)} = a^2b = A, \\ abb_{(3)} &= bab_{(5)} = bba_{(6)} = ab^2 = B. \end{aligned} \quad (3)$$

При возведении бинома (2) в куб, с учетом (3), имеем:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3A + 3B + b^3 \quad (4)$$

Числа, расположенные в горизонтальных рядах треугольника Паскаля (Рис. 1), назовем биномиальными коэффициентами  $p$ -вида.

Таким образом, используя табличную запись (Рис. 2, 3) в п. 1.2, мы получили наглядное изображение членов многочлена (Рис. 2) и рассчитали биномиальные коэффициенты (Рис. 3) без использования изображения треугольника Паскаля (Рис. 1) или рекуррентной формулы (1). Используя описанный табличный алгоритм, мы также получили выражение для бинома (4) из выражения (2).

# 1. Нелинейный арифметический треугольник и алгоритм вычисления биномиальных коэффициентов нового вида

## 1.1. Нелинейный арифметический треугольник

В работе [8] была описана другая двумерная числовая таблица – нелинейный арифметический треугольник, в котором числа  $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$  расположены послойно рядами (Рис. 4):

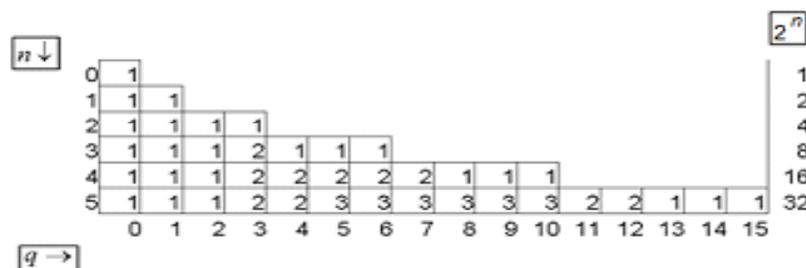


Рис. 4. Нелинейный арифметический треугольник,  $n$  – порядковый номер ряда,  $q$  – порядковый номер числа в ряду, в колонке справа – суммы чисел в ряду.

Нелинейный арифметический треугольник строится в соответствии с формулой [8]:

$$\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ q-n \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где  $n$  – порядковый номер ряда,  $q$  – порядковый номер числа в горизонтальном ряду (Рис.4) и  $0 \leq q \leq n(n+1)/2$ . Сумма коэффициентов для  $n$ -ряда, равная  $2^n$ , приведена в колонке справа на Рис. 4.

Выражение (5) соответствует известной формуле [10] разбиения чисел на слагаемые. Число  $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$  показывает, сколькими способами можно разбить число  $q$  на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ , при этом порядок слагаемых не учитывается, а все слагаемые различны.

**Пример 2.1.** Число 3 можно разбить на слагаемые 1, 2, 3 двумя

способами:  $3 = 1 + 2$ ,  $3 = 3$ , т.е. для нашего случая,  $n = 3$ ,  $q = 3$ , будет:  $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2$  (Рис. 4).

### 1.1. Табличный алгоритм вычисления биномиальных коэффициентов нового вида

Заменяем в Рис. 2 буквы  $a$  и  $b$  на числа  $0$  и  $l$ , соответственно: т.е. в первой строке ( $k = 1$ ) вместо  $b$  у нас будут тройки ( $l = 3$ ), во второй – ( $k = 2$ ) вместо  $b$  – двойки ( $l = 2$ ), в третьей – ( $k = 3$ ) вместо  $b$  – единицы ( $l = 1$ ) (Рис. 5):

		$m \rightarrow$									
		0	1	2	3	4	5	6	7		
	3	0	0	0	0	3	3	3	3	1	$k$
↑	2	0	0	2	2	0	0	2	2	2	↓
$l$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	3	
	$\Sigma$	0	1	2	3	3	4	5	6		
	$\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$	1	1	1	2		1	1	1		

Рис. 5. Табличная запись чисел в квазидвоичном виде, числа расположены в вертикальных столбцах в рамке, состоит из  $0$  и чисел  $l$ .

Числа над таблицей (над рамкой) на Рис. 5 соответствуют номеру  $m$ -столбца таблицы, а числа справа от рамки соответствуют номеру  $k$ -строки таблицы. Последовательность нулей и чисел  $l$  назовем записью чисел в квазидвоичном виде. Числа  $l$  показаны слева от рамки (Рис. 5).

Просуммируем числа (Рис. 5) в вертикальных столбцах – их суммы  $\Sigma$  показаны в виде жирных цифр в первой строке под рамкой (таблицей). Во второй строке под рамкой показано, насколько часто величины этих сумм встречаются: ноль встречается один раз, единица – один раз, двойка – один раз, тройка – два раза, четверка – один раз, пятерка – один раз, шестерка – один раз.

Числа во второй строке под рамкой:  $1, 1, 1, 2, 1, 1, 1$ , равны числам  $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$ , расположенным в горизонтальном ряду для  $n = 3$  нелинейного арифметического треугольника, приведенного на Рис. 4.

**Пример 2.2.** Сумма чисел, расположенных в вертикальном столбце  $m = 3$  (Рис. 5) равна:  $1 + 2 + 0 = 3$ . Сумма чисел, расположенных в вертикальном столбце  $m = 4$  (Рис. 5) равна:  $0 + 0 + 3 = 3$ . Таким обра

образом, суммы чисел (вторая строка под рамкой на Рис. 5), равные трем, встречаются два раза, или  $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2$ ,  $n = 3, q = 3$  (ср. с Примером 2.1).

Выше, в начале п. 1.2, мы приняли, что в общем случае при возведении бинома (2) в степень  $n$  умножение некоммутативно. В рассматриваемом частном случае умножение также некоммутативно.

Однако некоторые члены многочлена (2) в рассматриваемом случае являются подобными и их можно складывать (несмотря на некоммутативность умножения) в соответствии со значением чисел  $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$  по аналогии с числами  $\binom{n}{p}$ . В данном примере это члены  $m = 3, 4$  многочлена (2), составляющие вертикальные столбцы 3, 4 таблицы на Рис. 2 (и в соответствии с таблицей на Рис. 5), т. е. в выражении (2) в данном случае (в отличие от случая, описанного в п. 1.2, выражение (3)) подобные члены – это:

$$abb_{(3)} = baa_{(4)}, \text{ или более компактно: } ab^2 = ba^2 = C. \quad (6)$$

Ниже, п. 3.2 будет показана геометрическая интерпретация подобных членов вида (6).

При возведении бинома (2) в куб, с учетом (6), имеем:

$$(a + b)^3 = a^3 + a^2b + aba + 2C + bab + b^2a + b^3. \quad (7)$$

Здесь, для компактности записи, мы приняли  $aaa_{(0)} = a^3$ ,  $aab_{(1)} = a^2b$ ,  $bba_{(6)} = b^2a$ ,  $bbb_{(7)} = b^3$ .

Выражение (7), описывающее бином, отличается от выражения (4). Числа, расположенные в горизонтальных строках нелинейного арифметического треугольника на Рис. 4, назовем биномиальными коэффициентами  $q$ -вида в отличие от биномиальных коэффициентов  $p$ -вида на Рис. 1.

Назовем также биномы, описываемые выражениями (4) и (7), биномами  $p$ - и  $q$ -видов, соответственно.

Аналогичным образом, можно вычислить биномиальные коэффициенты  $q$ -видов для различных значений  $n$  и записать формулу, аналогичную (7) для различных степеней бинома  $q$ -вида.

### 3.1. Геометрическая интерпретация бинома $n$ -вида

Рассмотрим симметричное изображение треугольника Паскаля и ветвящуюся систему лучей на Рис. 6:

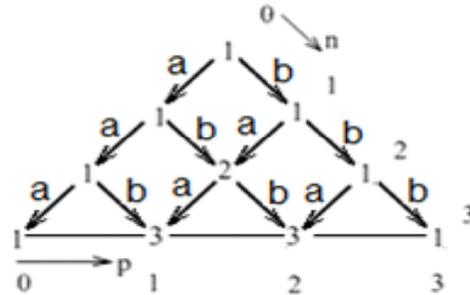


Рис. 6. Симметричное изображение треугольника Паскаля и ветвящаяся система лучей,  $n$  – номер прохода лучей,  $p$  – номер точек ветвления (ср. с Рис. 1). Направления прохода лучей обозначены стрелками, расположенными между числами треугольника Паскаля:  $a$  – направление стрелок влево–вниз,  $b$  – направление вправо–вниз.

Представим, что световая энергия (или частица на доске Гальтона [11]) распространяется (движется) сверху вниз вдоль звеньев ломаных траекторий. Звенья (лучи) расположены между числами треугольника Паскаля (между точками ветвления лучей) в виде стрелок [11] на Рис. 6.

Звенья (стрелки), направленные влево–вниз обозначим –  $a$ , вправо–вниз –  $b$  (Рис. 6).

Так, например, для случая  $n = 3$ , в точку  $p = 0$  ведет только одна траектория, состоящая из трех звеньев  $a$ :  $aaa$  или  $a^3$ , в точку  $p = 1$  ведут три траектории, состоящие из трех звеньев:  $aab, aba, baa$ , в точку  $p = 2$  – три траектории, состоящие из звеньев:  $bba, bab, abb$ , и т. д.

Как мы видим, часть световой энергии распространяющаяся вдоль лучей приходит в одни и те же точки ветвления, поэтому траектории, по которым распространяются эта энергия лучей, являются подобными и из Рис. 6 мы получаем выражение, аналогичное (3):

$$aab = aba = baa = a^2b = A \text{ и } bba = bab = abb = ab^2 = B.$$

Таким образом, световую энергию, распространяющуюся вдоль подобных траекторий можно складывать, и, следовательно, исходя из

рассмотрения траекторий на Рис. 6, можно формулу бинома (2) свести к выражению (4).

### 3.2. Геометрическая интерпретация бинома $q$ -вида

Рассмотрим другую ветвящуюся систему лучей, возникшую при описании процессов, происходящих в лазерах, предложенную в [7] и описанную в [8] (Рис. 7):

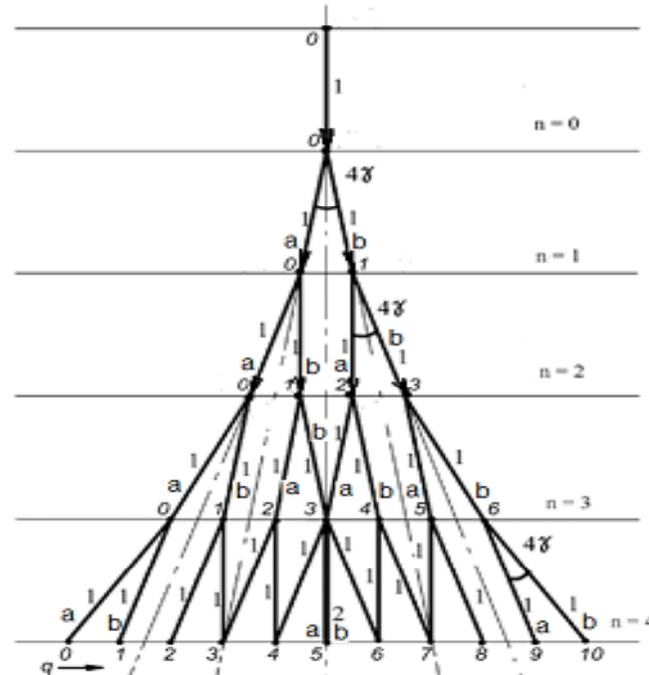


Рис. 7. Ветвящаяся система лучей, наклоненных под малыми углами, кратными  $2\gamma$  к направлению вертикали. Лучи и звенья показаны сплошными линиями, оси симметрии – штрих-пунктирными линиями. Свет распространяется сверху вниз,  $n$  – номер прохода лучей,  $q$  – номер точек ветвления лучей. Лучи, отклоненные влево, обозначены  $a$ , вправо –  $b$ .

Представим, что световая энергия распространяется сверху вниз последовательно вдоль звеньев ломаных и ветвящихся траекторий, изображенных на Рис. 7. (Некоторые звенья для наглядности изображены в виде стрелок.) Лучи, меняющие свое направление влево от направления предыдущего звена, обозначим  $a$ , вправо –  $b$  (Рис. 7).

Так, например, для  $n = 3$ , в точку  $q = 0$  ведет только одна траектория, состоящая из трех звеньев  $a$ :  $aaa$  или  $a^3$ , в точку  $q = 1$  ведет одна траектория, состоящая из трех звеньев:  $aab$ , в точку  $q = 2$  – одна траектория, состоящая из трех звеньев:  $aba$ , в точку  $q = 3$  – две траектории:  $abb$  и  $baa$ , и т. д.

Как видно на Рис. 7, часть световой энергии, распространяющейся вдоль лучей, приходит в одни и те же точки ветвления, поэтому траектории, по которым распространяется эта энергия, являются подобными и мы получаем выражение, аналогичное (6):

$$abb = baa = ab^2 = ba^2 = c.$$

Таким образом, энергию, приходящую в одни и те же точки ветвления можно складывать, следовательно, исходя из рассмотрения траекторий на Рис. 7, можно формулу бинома (2) записать как выражение (7).

### 3.3. Особенности ветвящихся систем

Мы рассмотрели две различные ветвящиеся системы лучей в п. 3.1 и п. 3.2. Необходимо отметить, что система лучей на Рис. 7 имеет свои особенности по сравнению с системой лучей на Рис. 6.

Звенья (лучи), составляющие траектории на Рис. 6, имеют одно из однозначных направлений –  $a$  или  $b$ .

Звенья (лучи), составляющие траектории на Рис. 7, могут также иметь одно из однозначных направлений –  $a$  или  $b$ . Это, например, относится к лучам, составляющим траектории  $aaa = a^3$  или  $bbb = b^3$ .

Звенья (лучи) на Рис. 7 могут иметь и неоднозначное направление (в некоторых случаях одно и то же звено (луч) имеет направление  $a$ , а в других –  $b$ ), которое зависит от того, какое направление имело предыдущее звено (луч) траектории. Это относится, например, к звеньям, параллельным вертикали, а также к звеньям, наложенным друг на друга (Рис. 7). Например, при четвертом проходе ( $n = 4$ ), луч, приходящий в точку  $p = 5$ , имеет направления  $a$  и  $b$  одновременно, т. к. последнее звено является частью двух траекторий:  $abba$  и  $baab$  (Рис. 7).

### Заключение

В п. 3 была продемонстрирована геометрическая интерпретация бинома  $q$ -вида на основе рассмотрения траекторий и их звеньев непосредственно из модели, изображенной на Рис. 7. Однако, подсчет

позволяет однозначно определить все звенья, из которых траектории состоят.

С помощью выражения (5) возможно построить нелинейный арифметический треугольник (Рис. 4), а значит, подсчитать, сколько траекторий на Рис. 7 являются подобными (приходят в одну и ту же точку). Однако, выражение (5) не показывает, из каких именно звеньев состоят траектории.

Мы показали, что с помощью алгоритма, предложенного в п. 2.2, можно вычислить не только элементы (числа), составляющие нелинейный арифметический треугольник (т. е. число траекторий), но и определить сами эти траектории и из каких звеньев они состоят.

Таким образом, было показано соответствие предложенного алгоритма геометрической модели. Такую возможность дало рассмотрение биномиальных коэффициентов и бинома  $q$ -вида. Выражение (7) для бинома  $q$ -вида мы получили при рассмотрении дополнительных условий, взятых из исследования процессов, происходящих в лазерах.

### **Благ одарности**

Автор выражает благодарность д. ф.-м. н. Э. Э. Шнолю за ряд полезных замечаний, высказанных при подготовке рукописи этой работы.

### **Литература**

1. *Анаьев Ю. А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки. М: Наука, 1990.
2. *Юркин А. В.* Патент № 1777656, СССР, приоритет от 26.06.90; БИ № 43, 1990.
3. *Юркин А. В.* Новое зеркало лазерного резонатора. // Квантовая электроника. 1991. Т.18, с.393.
4. *Бюллер В.* Гаусс. М: Наука, 1989, с. 149.
5. *Ландсберг Г. С.* Оптика. М: Наука, 1976, с. 272.
6. *Юркин А. В.* Квазирезонатор – новая интерпретация рассеяния в лазере. // Квантовая электроника. 1994. Т.21, с.385.
7. *Yurkin A. V.* System of rays in lasers and a new feasibility of light coherence control. // Optics Communications. 1995. V.114, p.393.
8. *Юркин А. В.* Система лучей в лазерах, нелинейная арифметическая пирамида и нелинейные арифметические треугольники. // Тр. Института системного анализа РАН, 2008, т. 32(2), с. 99 – 112.
9. *Кузьмин О. В.* Треугольник Паскаля: свойства и обобщения. СОЖ. 2000.
10. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М: Наука, 1969. (Гл. 4, формула (24)).
11. *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. М: Наука, 1995, с. 20.

## О БИНОМИАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВТОРОГО (НЕЛИНЕЙНОГО) ВИДА ДЛЯ БОЛЬШИХ СТЕПЕНЕЙ БИНОМА

Несомненно, что всякое наше познание  
начинается с опыта, ...

И. Кант [10]

В работе [1] была предложена наглядная геометрооптическая модель на основе рассмотрения биномиального распределения для описания распространения света в лазере. Расчеты проводились при использовании параксиального (гауссова) [2] приближения.

В работе [3] были описаны нелинейная арифметическая пирамида и арифметические треугольники второго (нелинейного) вида и были предложены рекуррентные формулы для построения нелинейной арифметической пирамиды и нелинейных арифметических треугольников. В этой же работе показана их физическая интерпретация – описание процесса распространения света в лазерах, оснащенных многолепестковым зеркалом, приведены примеры из комбинаторики.

В работе [4] был предложен новый алгоритм построения нелинейного арифметического треугольника, показана связь предложенного алгоритма, двоичной системы счисления и биномиальных коэффициентов различных видов. Дана геометрическая интерпретация биномов двух видов при рассмотрении траекторий лучей для двумерного случая.

В настоящей работе приведены численные расчеты биномиального распределения второго вида для больших степеней бинома. Проведена аналогия с симметричным биномиальным распределением (первого вида) [5].



Считаем, что геометрические размеры самих чисел (цифр, составляющих эти числа) малы, и числа в рядах расположены равномерно на одинаковых расстояниях друг от друга.

Сумма коэффициентов для  $n$ -степени бинома, равная  $2^n$  приведена в колонке справа на Рис. 1. Наклонные прямые на Рис. 1 являются элементами контура треугольника Паскаля. Длина основания арифметического треугольника  $L_n$  для каждого  $n$ -ряда пропорциональна числу биномиальных коэффициентов  $n - p_{max}$ , т. е.  $L_n \sim n$ . Числа  $n$ -ряда, сумма которых

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n, \quad (3)$$

расположены в пределах длины  $L_n$ . Считаем, что биномиальные коэффициенты  $\binom{n}{p}$  для  $n = 4$  (Рис. 1) расположены на линии  $L_n$  основания треугольника.

На Рис. 2 приведены контуры треугольника Паскаля для больших степеней бинома  $n$ :

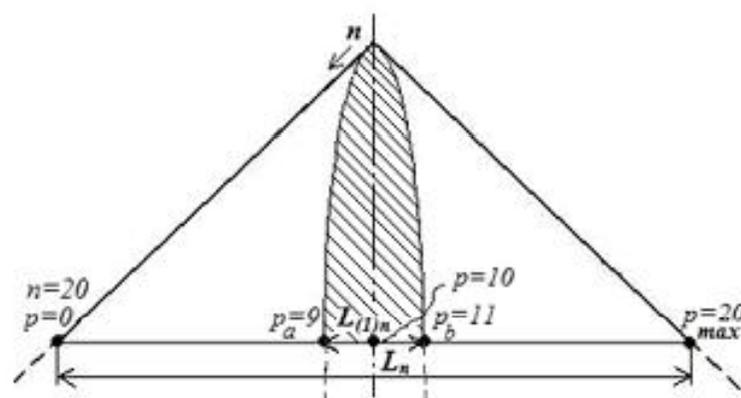


Рис. 2. Контур треугольника Паскаля для больших степеней бинома  $n$ . Числа, заполняющие арифметический треугольник не показаны ввиду малости масштаба. Для примера точками обозначены биномиальные коэффициенты:  $\binom{20}{0}$ ,  $\binom{20}{9}$ ,  $\binom{20}{10}$ ,  $\binom{20}{11}$ ,  $\binom{20}{20}$ . Наклонные прямые – боковые линии контура арифметического треугольника,  $L_n$  – длина основания треугольника.  $L_{(1)n}$  – часть основания треугольника, заключенная между кривыми,  $L_{(2)n} \approx L_n^{0.43}$ .

Контурь треугольника Паскаля для больших значений  $n$  на Рис. 2 построены аналогично таковому на Рис. 1, однако сами числа, заполняющие арифметический треугольник, не показаны ввиду малости масштаба. Биномиальные коэффициенты для некоторого  $n \gg 1$  (Рис. 2) расположены на линии  $L_n$  основания треугольника.

В  $n$ -ряду сумма всех биномиальных коэффициентов

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n \sim n \sim L_n. \quad (4)$$

Часть биномиальных коэффициентов  $\binom{n}{p_a}, \dots, \binom{n}{p_b}$  расположены симметрично относительно вертикали в центре треугольника (заштрихованная область) на отрезке  $L_{(1)n}$  (Рис. 2).

Сумма этой части биномиальных коэффициентов, приближенно равна полусумме от (4):

$$\sum_{p_a}^{p_b} \binom{n}{p} = \binom{n}{p_a} + \dots + \binom{n}{p_b} \approx \frac{1}{2} 2^n \quad (5)$$

Эта полусумма  $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$  биномиальных коэффициентов, расположенных в центральной части в этом ряду, находится в пределах длины отрезка

$$L_{(1)n} \approx L_n^{k_1} \sim \frac{1}{2}2^n, \quad (6)$$

и

$$\frac{1}{2}2^n \sim p_{max}^{k_1} = n^{k_1}, \quad (7)$$

где (как показали наши вычисления для  $n \gg 1$ ) эмпирический коэффициент

$$k_1 \approx 0,43. \quad (8)$$

Отрезок  $L_{(1)n}$  на Рис. 2 расположен между кривыми, по форме аналогичными приведенным в [6].

**Пример 1.** Для  $n = 20$  (Рис. 2) биномиальные коэффициенты  $\binom{20}{0} \dots \binom{20}{20}$  будут: 1, 20, 190, 1140, 4845, 15504, 38760, 77520, 125970, 167960, 184756, 167960, 125970, 77520, 38760, 15504, 4845, 1140, 190, 20, 1. Сумма этих чисел:  $2^{20} = 1048576$ , полусумма:  $2^{19} = 524288$ . Длины, в соответствии с (4, 6, 8):  $L_{20} \sim 20$ ,  $L_{(1)20} \approx L_n^{0,43} \sim \frac{1}{2} 2^{20} \sim 20^{0,43} \approx 3,6 \approx 3$ . Сумма трех (подчеркнутых в приведенном выше ряду) биномиальных коэффициентов, расположенных в центральной части основания треугольника на Рис. 2, будет:  $\binom{20}{9} + \binom{20}{10} + \binom{20}{11} = 167960 + 184756 + 167960 = 520676 \approx 2^{19}$

, т. е. примерно равна полусумме  $2^{19} = 524288$  всех биномиальных коэффициентов. В данном примере  $p_a = 9$ ,  $p_b = 11$ . При больших значениях  $n$  выражение (7) дает более точный результат.

Как показали наши численные расчеты, более точно коэффициент  $k_1$  (8) будет равен, например, для  $n = 20 - k_1 \approx 0,3667$ ,  $L_{(1)20} \sim 3$ , для  $n = 77 - k_1 \approx 0,4124$ ,  $L_{(1)77} \sim 6$ , для  $n = 100 - k_1 \approx 0,4225$ ,  $L_{(1)100} \sim 7$ , для  $n = 238 - k_1 \approx 0,4382$ ,  $L_{(1)238} \sim 11$ , для  $n = 261 - k_1 \approx 0,4466$ ,  $L_{(1)261} \sim 12$ , и т. д.

Таким образом, все биномиальные (первого вида) коэффициенты (их сумма – выражение (4)) расположены между наклонными линиями (Рис. 1, 2) и их количество растет с увеличением линейно:  $L_n \sim n$ . Биномиальные коэффициенты в центральной части Рис. 1, 2, составляющие полусумму всех биномиальных коэффициентов (выражения (5, 7)), расположены между наклонными кривыми (Рис. 2) и их число растет с увеличением  $n$  в соответствии с эмпирической степенной зависимостью  $L_{(1)n} \sim \frac{1}{2} 2^n \sim n^{0,43}$ .

Необходимо отметить, что значение эмпирического коэффициента  $k_1$  требует дальнейшего уточнения и возможных аналитических исследований.

## 1.2. Биномиальное распределение первого вида

Для удобства изложения воспользуемся общепринятым понятием *вероятность*. Биномиальная вероятность (отношение некоторого биномиального коэффициента к сумме биномиальных коэффициентов) равна  $P_n(p) = \binom{n}{p} \frac{1}{2^n}$  [5].

Биномиальное распределение первого вида [5, 8] и формы огибающих для биномиального распределения показаны на Рис. 3.

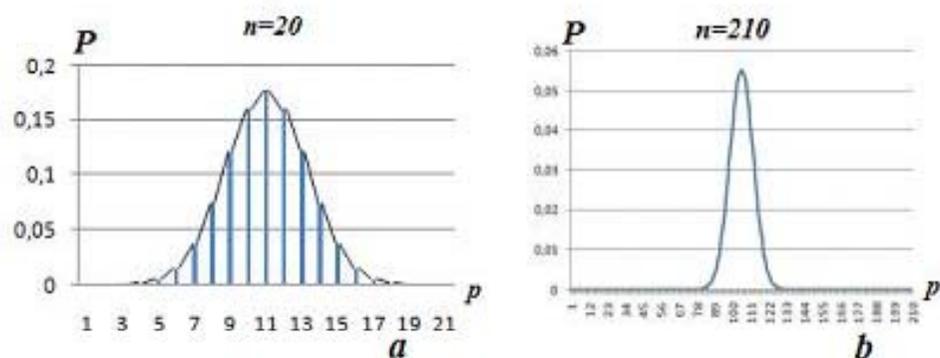


Рис. 3. Биномиальное распределение первого вида для  $n = 20$  (а) и огибающие биномиального распределения первого вида  $P_n(p)$  для  $n = 20$  (а) и  $n = 210$  (б).

На Рис. 4 показана форма огибающей (аналогичная форме для нормального распределения [7, 8]) для сумм биномиальных коэффициентов первого вида  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$ .

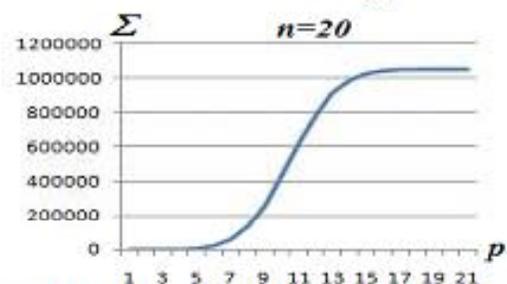


Рис. 4. Огибающая сумм биномиальных коэффициентов первого вида для  $n = 20$ .

# 1. Нелинейный арифметический треугольник и особенности биномиального распределения второго вида

## 2.1. О геометрических свойствах нелинейного арифметического треугольника

Биномиальные коэффициенты второго вида  $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$ , описанные в работах [3, 4], можно вычислить с помощью другой двумерной числовой таблицы – нелинейного арифметического треугольника, в котором числа  $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$  также расположены послойно рядами (Рис. 5).

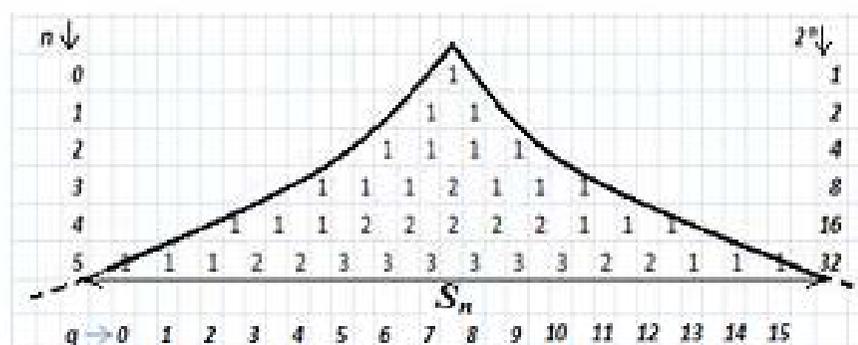


Рис. 5. Нелинейный арифметический треугольник.  $n$  – порядковый номер ряда,  $q$  – порядковый номер числа в ряду, в колонке справа – суммы чисел в ряду, наклонные кривые – боковые линии контура арифметического треугольника,  $S_n$  – длина основания.

Нелинейный арифметический треугольник строится в соответствии с формулой [3]:

$$\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ q-n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ q \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где  $n$  – степень бинома,  $q$  – порядковый номер числа в горизонтальном ряду (Рис. 5) и

$$0 < q < n(n + 1)/2, q_{max} = n(n + 1)/2. \quad (10)$$

Сумма коэффициентов для  $n$ -степени бинома, равная  $2^n$ , приведена в колонке справа на Рис. 5.

Выражение (9) соответствует известной формуле [9] разбиения чисел на слагаемые. Число  $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix}$  показывает, сколькими способами можно разбить число  $q$  на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ , при этом порядок слагаемых не учитывается, а все слагаемые различны.

Наклонные прямые на Рис. 5 являются элементами контура нелинейного арифметического треугольника. Длина основания арифметического треугольника  $S_n$  для каждого  $n$ -ряда пропорциональна  $q_{max}$ , т. е.

$$S_n \sim q_{max} = n(n + 1)/2. \quad (11)$$

Числа  $n$ -ряда, сумма которых

$$\sum_{q=0}^{q_{max}} \begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} = 2^n, \quad (12)$$

расположены в пределах длины  $S_n$ . Считаем, что биномиальные коэффициенты  $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$  для  $n = 4$  (Рис. 5) расположены на линии  $S_n$  основания треугольника.

На Рис. 6 приведены контуры нелинейного арифметического треугольника для больших степеней бинома  $n$ .

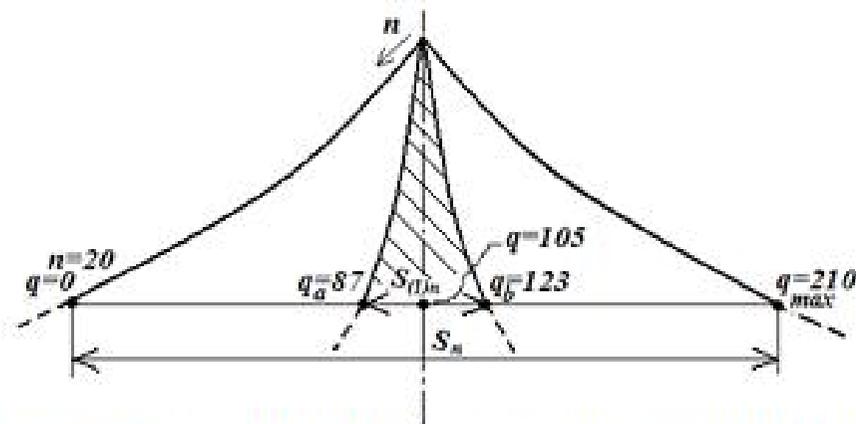


Рис. 6. Контуры нелинейного арифметического треугольника при больших степенях бинома  $n$ . Числа, заполняющие арифметический треугольник, не показаны ввиду малости масштаба. Для примера точками обозначены биномиальные коэффициенты:  $\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 20 \\ 107 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 20 \\ 105 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 20 \\ 123 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 20 \\ 210 \end{bmatrix}$ . Внешние наклонные кривые – боковые линии контура нелинейного арифметического треугольника,  $S_n$  – длина основания треугольника,  $S_{(1)n}$  – часть основания треугольника, заключенная между внутренними (расположенными ближе к вертикали) кривыми,  $S_{(1)n} \approx S_n^{0.7}$ .

Контуры нелинейного арифметического треугольника для больших значений  $n$  на Рис. 6 построены аналогично таковым на Рис. 5, однако сами числа, заполняющие арифметический треугольник, не показаны ввиду малости масштаба. Биномиальные коэффициенты для некоторого  $n \gg 1$  (Рис. 6) расположены в ряду на линии  $S_n$  основания треугольника.

В  $n$ -ряду сумма всех биномиальных коэффициентов второго вида

$$\sum_{q=0}^{q_{max}} \begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} = 2^n \sim q_{max} = \frac{n(n+1)}{2} \sim S_n. \quad (13)$$

Часть биномиальных коэффициентов  $\left[ \begin{matrix} n \\ q_a \end{matrix} \right], \dots, \left[ \begin{matrix} n \\ q_b \end{matrix} \right]$  расположены симметрично относительно вертикали в центре треугольника на отрезке  $S_{(1)n}$  (Рис. 6).

Сумма этой части биномиальных коэффициентов, приближенно равна полусумме от (12):

$$\sum_{q_a}^{q_b} \left[ \begin{matrix} n \\ q \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n \\ q_a \end{matrix} \right] + \dots + \left[ \begin{matrix} n \\ q_b \end{matrix} \right] \approx \frac{1}{2} 2^n. \quad (14)$$

Эта полусумма  $\frac{1}{2} 2^n = 2^{n-1}$  биномиальных коэффициентов, расположенных в центральной части треугольника (заштрихованная область) в этом ряду, как показали наши численные расчеты, находится в пределах длины отрезка

$$S_{(1)n} \approx S_n^{k_2} \sim \frac{1}{2} 2^n, \quad (15)$$

и

$$\frac{1}{2} 2^n \sim q_{\text{max}}^{k_2} = \left| \frac{n(n+1)}{2} \right|^{k_2}, \quad (16)$$

где (как показали наши вычисления для  $n \gg 1$ ) эмпирический коэффициент

$$k_2 \approx 0,71. \quad (17)$$

Отрезок  $S_{(1)n}$  расположен в центральной части между кривыми на Рис. 6.

**Пример 2.** Для  $n = 20$ ,  $q_{\max} = 210$  (Рис. 6) биномиальные коэффициенты  $\binom{20}{0}, \dots, \binom{20}{87}, \dots, \binom{20}{105}, \dots, \binom{20}{123}, \dots, \binom{20}{210}$  будут, соответственно: 1, ..., 12407, ..., 15272, ..., 12407, ..., 1. Сумма этих чисел  $2^{20} = 1048576$ , полусумма  $2^{19} = 524288$ . Длины в соответствии с выражениями (13, 15, 16, 17):  $S_{20} \sim 210$ ,  $S_{(1)20} \approx S_{20}^{0,71} \sim \frac{1}{2} 2^{20} \sim q_{\max}^{0,71} \approx 44,5 \approx 44$ . Сумма 37-ми биномиальных коэффициентов, расположенных в центральной части основания треугольника на Рис. 6,  $\binom{20}{87} + \dots + \binom{20}{105} + \dots + \binom{20}{123} = 12407 + \dots + 15272 + \dots + 12407 = 526376 \approx 2^{19}$

, т. е. примерно равно полусумме  $2^{19} = 524288$ . В данном примере  $q_a = 87$ ,  $q_b = 123$ . При больших значениях  $n$  выражение (16) дает более точный результат.

Как показали наши численные расчеты, более точно коэффициент  $k_2$  (17) будет равен, например, для  $n = 20 - k_2 \approx 0,6753$ ,  $S_{(1)20} \sim 37$ , для  $n = 55 - k_2 \approx 0,6753$ ,  $S_{(1)55} \sim 37$ , для  $n = 210 - k_2 \approx 0,6923$ ,  $S_{(1)210} \sim 161$ , для  $n = 238 - k_2 \approx 0,7079$ ,  $S_{(1)238} \sim 1192$ , для  $n = 261 - k_2 \approx 0,7095$ ,  $S_{(1)261} \sim 1446$ , для  $n = 261 - k_2 \approx 0,7096$ ,  $S_{(1)261} \sim 1650$ , и т. д.

Таким образом, все биномиальные коэффициенты второго вида (их сумма - выражение (12)) расположены между наклонными кривыми (Рис. 5, 6) и их количество растет с увеличением  $n$  в соответствии с квадратичной зависимостью  $S_n \sim n(n+1)/2$ . Биномиальные коэффициенты в центральной части Рис. 6, составляющие полусумму (выражения (14, 16, 17)) расположены между наклонными кривыми (Рис. 6) и их число растет с увеличением  $n$  в соответствии с эмпирической степенной зависимостью  $S_{(1)n} \sim \frac{1}{2} 2^n \sim \left| \frac{n(n+1)}{2} \right|^{0,71}$ .

Необходимо отметить, что значение эмпирического коэффициента  $k_2$  требует дальнейшего уточнения и возможных аналитических исследований.

## 2.2. Биномиальное распределение второго вида

Формы огибающих для биномиального распределения второго вида показаны на Рис. 7.

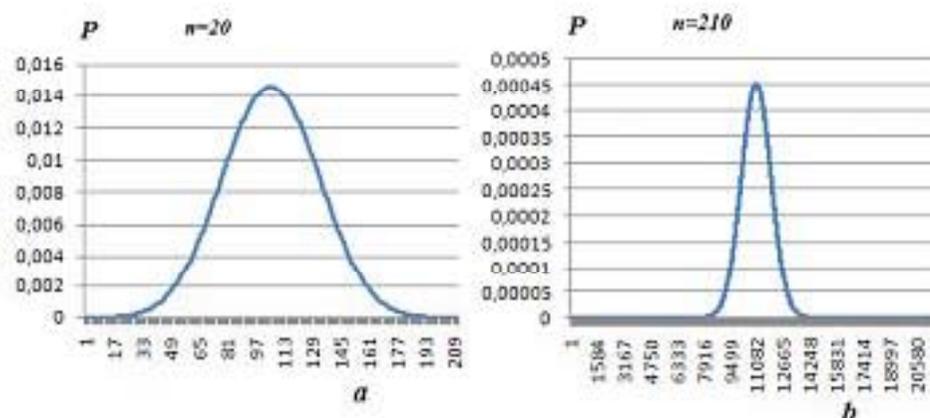


Рис. 7. Огибающие биномиального распределения второго вида  $P_{(\pm)n}(q)$  для  $n = 20$  (a) и  $n = 210$  (b).

На Рис. 8 показана форма огибающей (аналогичная Рис. 4) для сумм биномиальных коэффициентов второго вида  $\sum_{q=0}^{q_{max}} \binom{n}{q}$ .

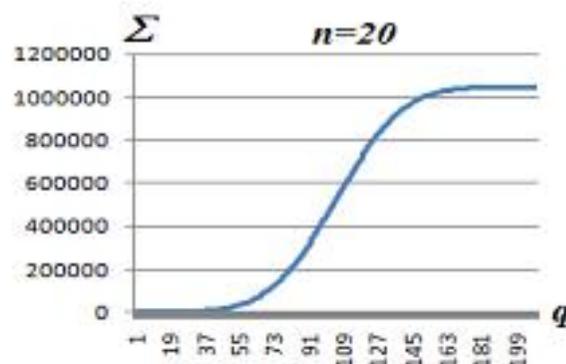


Рис. 8. Огибающая сумм биномиальных коэффициентов распределения второго вида для  $n = 20$ .

## 1. Сравнение форм огibaющих биномиальных распределений первого и второго вида

На Рис. 9 приведены в одинаковом масштабе огibaющие для биномиальных распределений первого (Рис. 3а) и второго (Рис. 7а) видов для  $n = 20$ .

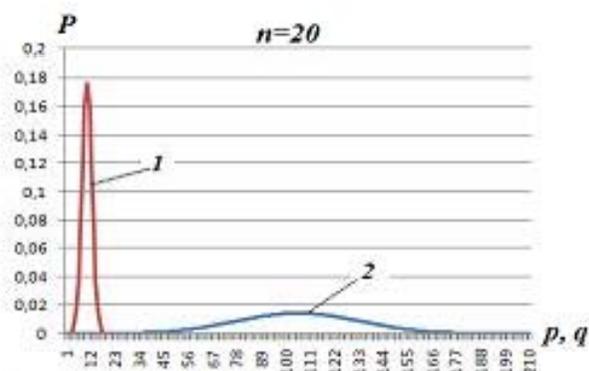


Рис. 9. Огibaющие биномиальных распределений первого (1) и второго (2) видов для  $n = 20$ .

На Рис. 10 приведены в одинаковом масштабе огibaющие сумм биномиальных коэффициентов первого (Рис. 4) и второго (Рис. 8) видов для  $n = 20$ .

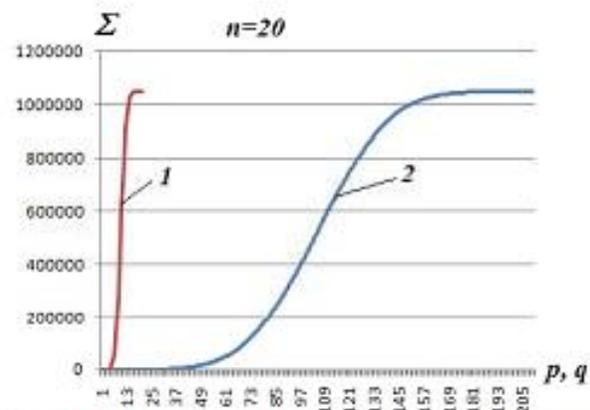


Рис. 10. Огibaющие сумм биномиальных коэффициентов первого (1) и второго (2) видов для  $n = 20$ .

На Рис. 11 приведены в различном (по оси абсцисс) масштабе огибающие сумм биномиальных коэффициентов первого и второго видов для  $n = 20$ .

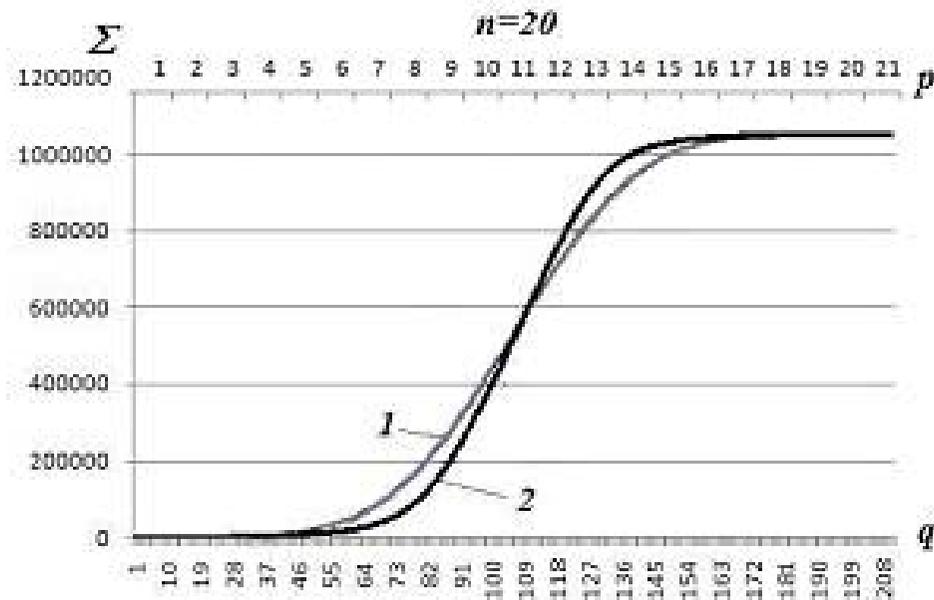


Рис. 11. Огибающие сумм биномиальных коэффициентов второго (1) и первого (2) видов для  $n = 20$ . Масштаб по оси абсцисс различен для  $p$  и  $q$ , отличается в 10,5 раз.

Масштаб по оси абсцисс на Рис. 11 отличается в 10,5 раз, т. к.  $\frac{q_{\max}}{p_{\max}} = 10,5$  для случая  $n = 20$ . На Рис. 11 видно, что величина (3) сумм  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$  биномиальных коэффициентов первого вида нарастает быстрее, чем величина (12) сумм  $\sum_{q=0}^{q_{\max}} \binom{n}{q}$  биномиальных коэффициентов второго вида.

## Заключение

В настоящей работе были представлены численные расчеты и наглядные геометрические интерпретации свойств линейного и нелинейного арифметических треугольников.

Было показано соответствие сумм и полусумм биномиальных коэффициентов определенным длинам отрезков линейного и нелинейного треугольников.

Предложена эмпирическая формула (требующая дальнейшего уточнения) для подсчета полусумм биномиальных коэффициентов, расположенных в центральной части нелинейного арифметического треугольника.

Были продемонстрированы формы огибающих биномиальных распределений первого и второго видов, а также формы огибающих для сумм биномиальных коэффициентов.

## Литература

1. *Yurkin A. V.* System of rays in lasers and a new feasibility of light coherence control. // *Optics Communications*. 1995. V.114, p.393.
2. *Ландсберг Г. С.* Оптика. М: Наука, 1976, с. 272.
3. *Юркин А. В.* Система лучей в лазерах, нелинейная арифметическая пирамида и нелинейные арифметические треугольники. // *Тр. Института системного анализа РАН*, 2008, т. 32(2), с. 99 – 112.
4. *Юркин А. В.* Траектории лучей и алгоритм вычисления биномиальных коэффициентов нового вида. // *Тр. Института системного анализа РАН*, 2009, т. 42(1), с. 66 – 77.
5. *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. М: Наука, 1995, с. 19, 24, 81.
6. Математический энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова, М: Советская энциклопедия, 1988, ст. Бернулли блуждание, с 86.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М: Мир, 1964, гл. 7, с. 182.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М: Наука, 1974, гл. 18, с. 572, 576.
9. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М: Наука, 1969, гл. 4, формула (24).
10. *Кант И.* Критика чистого разума. С-ПЕТЕРБУРГ: Издание книжного магазина М. В. Попова, 1902, с. 26.