Автономная нетеровая краевая задача в частном критическом случае

Чуйко С.М., Старкова О.В.

Исследовано задачу о нахождении решения

$$z(t,\varepsilon) \in C^1[a, b(\varepsilon)], C[0, \varepsilon_0]$$

автономной нетеровой $(m \neq n)$ краевой задачи

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon),$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \qquad (1)$$

которое при $\varepsilon = 0$ обращается на решение

$$z(t) \in C^1[a, b^*]$$

порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f,$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad b^* = b(a), \quad f \in \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

Здесь A — постоянная $(n \times n)$-размерная матрица;

$Z(z, \varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной $z(t, \varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по ε в окрестности нуля;

$\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелинейный векторные функционалы,

$$\ell z(\cdot, \varepsilon), \; J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b] \to R^m.$$

Функционал $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — непрерывно дифференцируем по неизвестной z и по ε в малой окрестности решения порождающей задачи на отрезке $[0, \varepsilon_0]$.

Допустим, что в критическом $(P_{Q^*} \neq 0)$ случае выполнено условие

$$P_{Q^*}\Big\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\Big\} = 0;$$

при этом задача (2) имеет r параметрическое семейство решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t), \; c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Нами использованы следующие обозначения:

$Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\mathrm{rank}\ Q = n_1 \leq \min\ (m,\ n)$;

$X_r(t)$ — $(n \times r)$-размерная матрица состоящая из $r := n - n_1$ линейно независимых столбцов нормальной $(X(a) = I_n)$ фундаментальной матрицы $X(t)$ однородной части дифференциальной системы (2);

P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$;

$P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$-размерная матрица, состоящая из $d := m - n_1$ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*};

$K[f](t)$ — оператор Грина задачи Коши для системы (2);

$G[f;\alpha](t)$ — обобщенный оператор Грина задачи (2).

Необходимое условие существование решения определяет Лемма 1.

Лемма 1.

Если краевая задача (1) в критическом случае $\left(P_{Q^*} \neq 0\right)$ имеет решение, которое при $\varepsilon = 0$ обращается на порождающее $z_0(t, c_r^*)$, то вектор c^* удовлетворяет уравнение

$$F_\rho(c_r^*, \beta^*) = P_{Q_\rho^*}\Big\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s, c^*)](\cdot)\Big\} = 0, \qquad (3)$$

здесь $P_{Q_\rho^*}$ — $(\rho \times m)$-размерная матрица, составленная из ρ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}.

Далее обозначим $(\rho \times 1)$-матрицу

$$\mathfrak{B}_0 = P_{Q_\rho^*}\Big\{\alpha - \ell K\big[Az_0(\tau, c_r^*) + f\big](\cdot)\Big\},$$

и пускай $P_{\mathfrak{B}_0^*}$ — $(\rho \times \rho)$-размерная матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^\rho \to N(\mathfrak{B}_0^*)$.

Допустим, что уравнение (3) имеет кратный действительный корень c^*, для которого выполняются условия

$$\left.\frac{\partial F(c_r,\beta)}{\partial c_r}\right|_{\substack{c_r = c_r^*,\\ \beta = \beta^*}} \equiv 0, \qquad \left.\frac{F(c_r,\beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{c_r = c_r^*,\\ \beta = \beta^*}} \neq 0. \qquad (4)$$

В этом случае схему анализа автономных краевых задач, предложенную в монографии [Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004] и статье [Чуйко С.М., Бойчук I.O., NO, 2009] не может быть использовано, поскольку для задачи (1) не имеет место ни один из критических случаев — первого, второго или более высокого порядка.

Достаточное условие существования решения определяет теорема.

Теорема 1.

В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0)$ для корня c^* уравнения $F_\rho(c^*) = 0$ задача (1) при условии

$$\left.\frac{\partial F(c_r, \beta)}{\partial c_r}\right|_{\substack{c_r = c_r^*, \\ \beta = \beta^*}} \equiv 0, \quad \left.\frac{F(c_r, \beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{c_r = c_r^*, \\ \beta = \beta^*}} \neq 0, \quad P_{\mathfrak{B}_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0$$

имеет по меньшей мере одно решение, которое при $\varepsilon = 0$ обращается на порождающее $z(\tau, 0) = z_0(\tau, c_r^*)$.

Для краевых задач, для которых выполняются условия доказанной теоремы, будем говорить имеет место частный критический случай. Для нахождения решения автономной нетеровой слабонелинейной краевой задачи в частному критическом случае построена модифицированная итерационная процедура с использованием техники наименьших квадратов.

На примере периодической задачи для уравнения типа Хилла

$$y'' + y = \varepsilon \cdot Y(y, \varepsilon), \tag{5}$$
$$y(0, \varepsilon) - y(T_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \;\; y'(0, \varepsilon) - y'(T_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0$$

продемонстрируем практический способ построения модифицированной итерационной процедуры для нахождения приближенных решений

$$y(t, \varepsilon): \;\; y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, T_1(\varepsilon)], T_1(0) = 2\pi, \;\; y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

в случае (4). Решение задачи (5) будем искать в малой окрестности решения $y_0(t)$ порождающей задачи:

$$y_0'' + y_0 = 0, \quad y_0(0) - y_0(2\pi) = 0, \quad y_0'(0) - y_0'(2\pi) = 0. \tag{6}$$

Здесь $Y(y, \varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$.

Зафиксируем начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи (6) стало однопараметрическим, например, $y_0(t) = \hat{c} \cdot \cos t$.

Допустим, что для задачи (5) имеет место критический случай. Уравнение для порождающих амплитуд (3) при этом принимает вид

$$F(\hat{c}^*, \beta^*) := \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \big(Y(y_0(t, \hat{c}^*)) - 2\beta^* y_0(t, \hat{c}^*)\big) dt = 0.$$

Допустим также, что уравнение для порождающих амплитуд имеет действительный корень $\hat{c}^*$, для которого выполнены условия (4). Оставляя одну независимую строку уравнения порождающих амплитуд приходим к скалярному уравнению

$$\hat{F}_\rho(\hat{c}^*, \beta^*) := \int_0^{2\pi} \big(Y(y_0(t, \hat{c}^*)) - 2\beta^* y_0(t, \hat{c}^*)\big) \cos t \, dt = 0.$$

Выполнение условия (4) при этом гарантирует неравенство

$$\mathfrak{B}_0 := \left. \frac{\partial F_\rho(\hat{c}, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\substack{\hat{c} \,=\, \hat{c}^*, \\ \beta \,=\, \beta^*}} \neq 0.$$

Последнее неравенство обеспечивает существование единственного периодического решения уравнения типа Хилла (5) в малой окрестности 2π-периодического порождающего решения $y_0(t, \hat{c}^*) = \hat{c}^* \cdot \cos t$.

Представим период искомого решения $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$ через новую неизвестную $\beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$. Величина $\beta(\varepsilon),\ \beta(0) = \beta^*$ подлежит определению в процессе нахождения решения задачи (5). Замена независимой переменной в случае периодической задачи принимает вид

$$t = \tau\big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\big).$$

Следствие

В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0)$ для корня c_r^* уравнения $F(c^*) = 0$ при условии (4) задача (5) имеет по меньшей мере одно решение, которое при $\varepsilon = 0$ обращается в порождающее $y(\tau, 0) = y_0(\tau, c_r^*)$. При условии

$$\det\Big[\Gamma\big(\mathcal{F}_k(\cdot, \varepsilon)\big)\Big] \neq 0, \quad \det\Big[\Gamma\big(\mathfrak{F}_k(\cdot, \cdot)\big)\Big] \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

это решение можно определить при помощи итерационного процесса:

$$y_1(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_1(\tau,\varepsilon),\quad x_1(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_1(\varepsilon),\tag{7}$$

$$c_1(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot\Big[\Gamma\big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\big)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\big[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\varepsilon\mathcal{A}_2\big(y_0(\tau,\hat{c}^*)\big)\big]d\tau,$$

$$\beta_1(\varepsilon)=\bar{\beta}_1(\varepsilon),\quad\bar{\beta}_1(\varepsilon)\approx\zeta_1(\varepsilon),\quad\zeta_1(\varepsilon)=\Psi(\varepsilon)\cdot q_1,$$

$$q_1=\Big[\Gamma\big(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot)\big)\Big]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Big\{\big(y_0''(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1''(\tau,\varepsilon)\big)+$$

$$+(1+2\varepsilon\beta^*)\cdot\big[y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\cdot Y\big(y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon\big)\big]\Big\}\,d\tau\,d\varepsilon,$$

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ \dots\ +\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\quad\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon)=\Big[\Gamma\big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\big)\Big]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Big\{\varepsilon\big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\big)^2\times$$

$$\times\Big[Y\big(y_k(\tau,\varepsilon),0\big)+\varepsilon\mathcal{A}_2\big(y_k(\tau,\varepsilon)\big)\Big]-\big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\big)^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon)-\frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Big\}d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon), \quad \bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon) + \ \dots \ \zeta_{k+1}(\varepsilon),$$

$$\zeta_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon) \cdot q_{k+1}(\varepsilon),$$

$$q_{k+1} = \Big[\Gamma\big(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot)\big)\Big]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon) \cdot \Big\{ y''_{k+1}(\tau,\varepsilon) +$$

$$+ \Big(1 + 2\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big) y_{k+1}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\Big(1 + 2\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big) \cdot Y\big(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon\big)\Big\}\, d\tau\, d\varepsilon.$$

С учетом замены переменной итерационная процедура (7) определяет приближенное решение периодической задачи для уравнения Хилла (5)

$$y_k\left(\frac{t}{1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)}, \varepsilon\right) =$$

$$= y_0\left(\frac{t}{1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)}, \hat{c}^*\right) + x_k\left(\frac{t}{1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)}, \varepsilon\right), \ \dots \ , k = 1, 2, \ \dots \ .$$

Пример

Исследуем задачу о построении периодического решения

$$y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0, T_1(\varepsilon)], \quad y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

уравнения

$$y'' + y + \varepsilon \cdot (2+\varepsilon) \cdot y = 0 \qquad (8)$$

в малой окрестности периодического решения $y_0(t) \in C^2[0, 2\pi]$ уравнения колебаний гармонического осциллятора $y_0'' + y_0 = 0.$

Зафиксируем начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи стало однопараметрическим, напрмер,

$$y_0(t) = \hat{c} \cdot \cos t, \ \ \hat{c} \in \mathbb{R}^1.$$

Для задачи о построении периодического решения (8) имеет место частный критический случай.

Уравнение для порождающих амплитуд

$$F(\hat{c}, \beta) := \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi \cdot \hat{c} \cdot (1+\beta) \end{bmatrix} = 0$$

имеет корень $\hat{c}^* \in \mathbb{R}^1, \quad \beta^* = -1$. Для любого $\hat{c}^* \in \mathbb{R}^1$ условия доказанной теоремы 1 выполняются. Возьмем для определенности $\hat{c}^* = 1$. Оставляя одну независимую строку уравнения для порождающих амплитуд приходим к скалярному уравнению

$$F_\rho(\hat{c}^*, \beta^*) := 2\pi \cdot \hat{c} \cdot (1+\beta) = 0,$$

которое определяет константу

$$\mathfrak{B}_0 := \left. \frac{\partial F_\rho(\hat{c},\beta)}{\partial \beta} \right|_{\substack{\hat{c} \,=\, \hat{c}^*, \\ \beta \,=\, \beta^*}} = 2\pi \neq 0.$$

Таким образом, периодическая задача для уравнения (8) в окрестности решения $y_0(t, \hat{c}^*) = \cos t$ порождающей задачи имеет единственное нетривиальное периодическое решение.
Итерационный процесс определяет приближение

$$y_k(\tau, \varepsilon) = \cos \tau, \ \ldots\ , \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

и первое приближение

$$\beta_1(\varepsilon) \approx -\frac{1\ 440\ 116\ 682\ 339}{1\ 440\ 116\ 685\ 341} + \frac{87\ 609\ 016\ \varepsilon}{5\ 840\ 602} - \frac{74\ 908\ 657\ \varepsilon^2}{37\ 454\ 561} + \\ + \frac{229\ 562\ 071\ \varepsilon^3}{91\ 835\ 790} - \frac{80\ 353\ 968\ \varepsilon^4}{26\ 822\ 569} + \frac{248\ 767\ 429\ \varepsilon^5}{71\ 862\ 883} - \frac{55\ 305\ 371\ \varepsilon^6}{14\ 664\ 224} + \\ + \frac{105\ 965\ 470\ \varepsilon^7}{29\ 572\ 501} - \frac{489\ 100\ 331\ \varepsilon^8}{194\ 454\ 496} + \frac{75\ 878\ 843\ \varepsilon^9}{82\ 367\ 574}$$

к функции $\beta(\varepsilon)$.
Точность нулевого и первого приближений характеризуют невязки

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,210\ 000, \quad \Delta_1(0,1) \approx 0,00\ 911\ 157;$$
$$\Delta_0(0,01) \approx 0,0201\ 000, \quad \Delta_1(0,01) \approx 0,0\ 000\ 990\ 124.$$