ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЫСОКОЙ ГЛАДКОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ СУММАМИ ФУРЬЕ

О.Г. Ровенская[1], О.А. Новиков[2]

[1] Донбасская государственная машиностроительная академия,
г. Краматорск, Украина

E-mail: o.rovenskaya@mail.ru

[2] Славянский государственный педагогический университет,
г. Славянск, Украина

E-mail: sgpi@slav.dn.ua

Задача Колмогорова-Никольского

Задача о нахождении асимптотических при $n \to \infty$ равенств для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n(\Lambda)) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_X,$$

где $\mathfrak{N}$ — фиксированный класс функций, $\mathfrak{N} \subset X$, X — линейное нормированное пространство, а $U_n(f; x; \Lambda)$ — тригонометрический полином, порождаемый линейным методом суммирования рядов Фурье $U_n(\Lambda)$, называется задачей Колмогорова-Никольского.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(n)$ такая, что

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n(\Lambda)) = \varphi(n) + o(\varphi(n)), \quad n \to \infty,$$

то задача Колмогорова–Никольского решена для класса функций $\mathfrak{N}$ и метода $U_n(\Lambda)$.

А.Н. Колмогоров, 1935 г.

$$\mathcal{E}(W^r; S_n) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\Big(\frac{1}{n^r}\Big), \;\; n \to \infty.$$

С.М. Никольский, 1945 г.

$$\mathcal{E}(W^r H^\alpha; S_n) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t dt + O\Big(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\Big), \; n \to \infty,$$

$$\mathcal{E}(W^r H_\omega; S_n) = \frac{2}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\Big(\frac{2t}{n}\Big) \sin t dt + O\Big(\omega(\frac{1}{n}) \frac{1}{n^r}\Big), \; n \to \infty.$$

Значительный вклад в развитие этой тематики внесли В.Т. Пинкевич, Б. Надь, В.К. Дзядык, Н.П. Корнейчук, С.Б. Стечкин, А.Ф. Тиман, А.И. Степанец, В.П. Моторный, А.В. Ефимов, С.А. Теляковский и другие.

Класси $C^{\overline{\psi}}$ и C_β^ψ

А.И. Степанец, 1996 г.

Пусть $f \in L$,

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фурье функции f, $\overline{\psi} = (\psi_1(k), \psi_2(k))$ — фиксированные системы чисел, удовлетворяющие условиям

$$\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0,\ \ k = 0, 1, \ldots.$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\ \widetilde{A}_k\ (f;x)\right),$$

где

$$\widetilde{A}_k\ (f;x) = a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx,$$

является рядом Фурье функции $\varphi \in L$, то эта функция называется $\overline{\psi}$-производной функции f и обозначается $\varphi = f^{\overline{\psi}}$.

Подмножество непрерывных функций $f \in L$, которые имеют $\overline{\psi}$-производные, обозначается через $C^{\overline{\psi}}$. Если $f \in C^{\overline{\psi}}$ і, кроме того, $f^{\overline{\psi}} \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L$, то $f \in C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, в частности

$$C_\infty^{\overline{\psi}} = \{f \in C^{\overline{\psi}}:\ f^{\overline{\psi}} \in S_M^0\},\quad C^{\overline{\psi}}H_\omega = \{f \in C^{\overline{\psi}}:\ f^{\overline{\psi}} \in H_\omega\},$$

где

$$S_M^0 = \{f \in C : \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)| \le 1, \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0\},$$

$$H_\omega = \{f \in C : |f(t') - (t'')| \le \omega(|t' - t''|), \forall\ t',\ t'' \in \mathbb{R}\},$$

$\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности.

Если существует последовательность $\psi(k)$ и число $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что
$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2},\ \ \psi_2(k) = \psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2},$$
то классы $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ совпадают с классами $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, которые были введены А.И. Степанцом в 1983 г.

При определённом выборе параметров $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ переходят в известные классы Соболева и Вейля:

- $\psi(k) = k^{-r},\ r \in \mathbb{N},\ \beta = r,\ \ C^{\psi}_{\beta,\infty} = W^r,\ \ C^{\psi}_{\beta}H_{\omega} = W^r H_{\omega},$
- $\psi(k) = k^{-r},\ r > 0,\ \beta = r,\ \ C^{\psi}_{\beta,\infty} = W^r_r,\ C^{\psi}_{\beta}H_{\omega} = W^r_r H_{\omega},$
- $\psi(k) = k^{-r},\ r > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\ \ C^{\psi}_{\beta,\infty} = W^r_{\beta},\ \ C^{\psi}_{\beta}H_{\omega} = W^r_{\beta}H_{\omega}.$

В случае $\psi(k) = q^k$, $q \in (0;1)$ элементы множеств $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ с точностью до константы представляются в виде
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t)P^{q}_{\beta}(t)dt,$$
где
$$P^{q}_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}),\ \ q \in (0;1),\ \ \beta \in \mathbb{R},$$
— ядро Пуассона. При этом классы $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ содержат функции $f(x)$, которые являются сужениями на действительную ось функций $f(z) = f(x+iy)$, аналитических в полосе
$$|\mathrm{Im}\ z| = |y| \le \ln\frac{1}{q}$$
и обозначаются $C^{q}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Через D_q обозначим множество последовательностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для которых имеет место соотношение
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q,\ \ q \in (0;1).$$

С.М. Никольский, 1946 г., С.Б. Стечкин, 1980 г.

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}; S_n) = \frac{8q^n}{\pi^2} + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)},$$

где

$$K(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода.

А.И. Степанец, 2000 г.

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta}H_\omega; S_n) = \frac{4q^n\theta_\omega}{\pi^2}K(q)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\sin t dt +$$

$$+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}\omega\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \theta_\omega \in [1/2, 1].$$

А.И. Степанец, А.С. Сердюк, 2000 г.

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; S_n) = \psi(n)\Big(\frac{8}{\pi^2}K(q) + O(1)(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})\Big),$$

где

$$\varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\Big|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\Big|, \;\; q = \lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}, \;\; q\in(0;1).$$

Классы $C^{2\overline{\psi}}_{\infty}$ и $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$

А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа, 1991 г.

Пусть R^2 — евклидово пространство с елементами $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $T^2=[-\pi;\pi]\times[-\pi;\pi]$,

$$N^2=\{\vec{x}\in R^2 \mid x_i\in\mathbb{N},\ i=1,2\},$$

$$N^2_*=\{\vec{x}\in R^2 \mid x_i\in\mathbb{N}_*=\mathbb{N}\cup\{0\},\ i=1,2\},$$
$$N^2_i=\{\vec{x}\in R^2 \mid x_i\in\mathbb{N},\ x_j\in\mathbb{N}_*,\ i\neq j\},$$
$$E^2=\{\vec{x}\in R^2 \mid x_i\in\{0;1\},\ i=1,2,\}.$$

Через $L(T^2)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на T^2 функций $f(\vec{x})=f(x_1,x_2)$.

Пусть $f\in L(T^2)$. Каждой паре точек $\vec{s}\in E^2$, $\vec{k}\in N^2_*$ поставим в соответствие коэффициент Фурье функции $f(\vec{x})$

$$a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(x_1,x_2)\cos\Big(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2}\Big)\cos\Big(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2}\Big)dx_1dx_2.$$

Каждому вектору $\vec{k}\in N^2_*$ поставим в соответствие величину

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^2} a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f)\cos\Big(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2}\Big)\cos\Big(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2}\Big)$$

и величины

$$A^{\vec{e}_1}_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^2} a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f)\cos\Big(k_1x_1-(s_1+1)\frac{\pi}{2}\Big)\cos\Big(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2}\Big),$$

$$A^{\vec{e}_2}_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^2} a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f)\cos\Big(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2}\Big)\cos\Big(k_2x_2-(s_2+1)\frac{\pi}{2}\Big).$$

Ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим соотношением

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N^2_*} 2^{-q(\vec{k})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

где $q(\vec{k})$ — количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $f \in L(T^2)$ и $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1,2$, $j = 1,2$, — фиксированные наборы систем чисел, $k \in \mathbb{N}_*$. Обозначим

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k)}, \;\; \overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k)}.$$

Пусть ряд

$$\sum_{\vec{k} \in N_i^2} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \overline{\psi}_i^2(k_i)} [\psi_{i1}(k_i) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i) A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f;\vec{x})]$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^2)$. Обозначим ее символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и назовем $\overline{\psi}_i$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i, $i = 1,2$. Смешанной $\overline{\Psi}$-производной по переменным x_i, $i = 1,2$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_2}}{\partial x_2} \big(\frac{\partial^{\overline{\Psi}_1} f(\vec{x})}{\partial x_1} \big)$.

Для заданного набора функций ψ_{ij}, Ψ_{ij}, $i = 1,2$, $j = 1,2$, символом $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ обозначают множество непрерывных функций $f \in L(T^2)$, имеющих почти везде ограниченные в смысле плоской меры $\overline{\Psi}$- и $\overline{\psi}_i$-производные

$$\operatorname{ess\,sup} |f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})| \le 1, \;\; \operatorname{ess\,sup} |f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})| \le 1, \;\; i = 1;2, \;\; \vec{x} \in T^2.$$

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1,2$, $j = 1,2$, определяющих класс $C_\infty^{2\overline{\psi}}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i, $\beta_i^* \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, такие, что

$$\psi_{i1}(k) = \psi_i(k) \cos \frac{\beta_i \pi}{2}, \;\; \psi_{i2}(k) = \psi_i(k) \sin \frac{\beta_i \pi}{2},$$

$$\Psi_{i1}(k) = \Psi_i(k) \cos \frac{\beta_i^* \pi}{2}, \;\; \Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k) \sin \frac{\beta_i^* \pi}{2},$$

то $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ является классом (ψ, β)-дифференцируемых функций и обозначается $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$.

А.И. Степанец, 1973 г.

$$\mathcal{E}(W^{r,s}_{r_1,s_1}; S_{\vec{n}}) = \sup_{f\in W^{r,s}_{r_1,s_1}} ||f(x_1;x_2) - S_{n_1,n_2}(f;x_1;x_2)||_C =$$

$$= \frac{4\ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4\ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1)\Big(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}}\Big).$$

П.В. Задерей, 1987 г.

$$\mathcal{E}\left(C^{2\psi}_{\beta} H_{\overline{\omega}}; S_n\right) = \sup_{f\in C^{2\psi}_{\beta} H_{\overline{\omega}}} ||f(x) - S_n(f;x)||_C \le$$

$$\le \frac{4}{\pi^4}\overline{\psi}(n)\ln^+\frac{n_1\pi}{a_1(n_1)}\ln^+\frac{n_2\pi}{a_2(n_2)}c_n(\omega) + \frac{2}{\pi^2}\psi_1(n_1)\ln^+\frac{n_1\pi}{a_1(n_1)}c_{n_1}(\omega_3)+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\psi_2(n_2)\ln^+\frac{n_2\pi}{a_2(n_2)}c_{n_2}(\omega_4) + O(\alpha_n(a,\psi,\omega)),$$

где

$$\alpha_n(a,\psi,\omega) = \min\Big\{\omega_1\left(\frac{1}{n_1}\right), \omega_2\left(\frac{1}{n_2}\right)\Big\}\Big(\overline{\psi}_1(n_1) b^{\overline{\psi}_2}_{n_2}(a_2)\ln^+\frac{n_1\pi}{a_1(n_1)}+$$

$$+b^{\overline{\psi}_1}_{n_1}(a_1)\overline{\psi}_2(n_2)\ln^+\frac{n_2\pi}{a_2(n_2)} + b^{\overline{\psi}_1}_{n_1}(a_1) b^{\overline{\psi}_2}_{n_2}(a_2)\Big) + b^{\psi_1}_{n_1}(a_1)\omega_3\Big(\frac{1}{n_1}\Big)+$$

$$+b^{\psi_2}_{n_2}(a_2)\omega_4\Big(\frac{1}{n_2}\Big).$$

В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая, 2004 г.

$$\mathcal{E}(C^{2q}_{\beta,\infty}; S_{\vec{n}}) = \frac{8q_1^{n_1}}{\pi^2}K(q_1) + \frac{8q_2^{n_2}}{\pi^2}K(q_2)+$$

$$+O(1)\Big(\frac{q_1^{n_1}}{n_1} + \frac{q_2^{n_2}}{n_2} + Q_1^{n_1}Q_2^{n_2}\Big).$$

Исследованы апроксимативные свойства прямоугольных сумм Фурье

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = S_{n_1,n_2}(f;\vec{x}) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$$

на классах периодических функций высокой гладкости $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$. Получено следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\psi_i(x) \in D_{q_i}$, $\Psi_i(x) \in D_{Q_i}$, q_i, $Q_i \in (0;1)$, β_i, $\beta_i^* \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$. *Тогда при* $n_i \to \infty$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^{2\psi}_{\beta,\infty}; S_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C^{2\psi}_{\beta,\infty}} ||f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C = \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1,2}\psi_i(n_i)K(q_i) +$$

$$+O(1)\Big[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i} + \sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} +$$

$$+\prod_{i=1,2}\frac{\Psi_i(n_i)}{1-Q_i}\Big(1 + \frac{\varepsilon_{n_1}(\Psi_1)}{1-Q_1} + \frac{\varepsilon_{n_2}(\Psi_2)}{1-Q_2} + \frac{\varepsilon_{n_1}(\Psi_1)\varepsilon_{n_2}(\Psi_2)}{(1-Q_1)(1-Q_2)}\Big)\Big],$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная относительно* n_i, q_i, Q_i, β_i, β_i^*,

$$K(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}},$$

— полный эллиптический интеграл первого рода,

$$\varepsilon_m(\psi) = \sup_{k\geq m}\Big|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\Big|, \quad q = \lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}.$$