А Л Г Е Б Р А

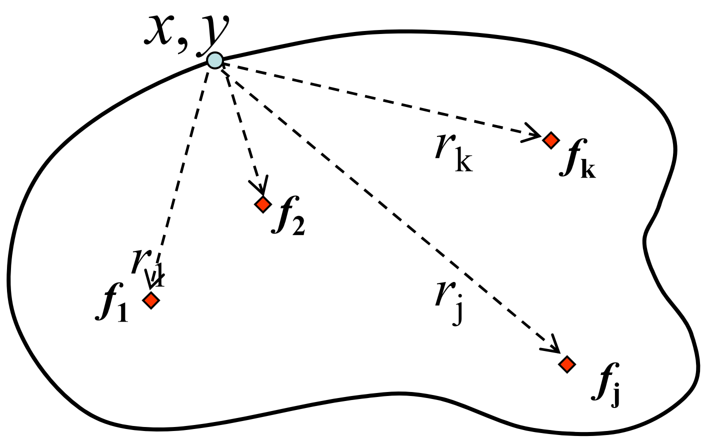
полиполярных чисел

Многофокусные лемнискаты

мультипликативный функционал

- Инвариант:

$$\boxed{\prod_{j=1}^{k} r_j = \boldsymbol{R}^{\mathrm{k}} = \mathrm{const}}$$



$$|z - f_1|\cdot|z - f_2|\cdot\ldots\cdot|z - f_k| = R^k$$

Расстояние между точками $r_j = |z - f_j|$:

$$\sqrt{[(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2]} = R^k$$

Обозначения, определения:

$f_1, \ldots, f_k$ - *фокусы*

a_j, b_j - *координаты фокусов*

R - *радиус лемнискаты*

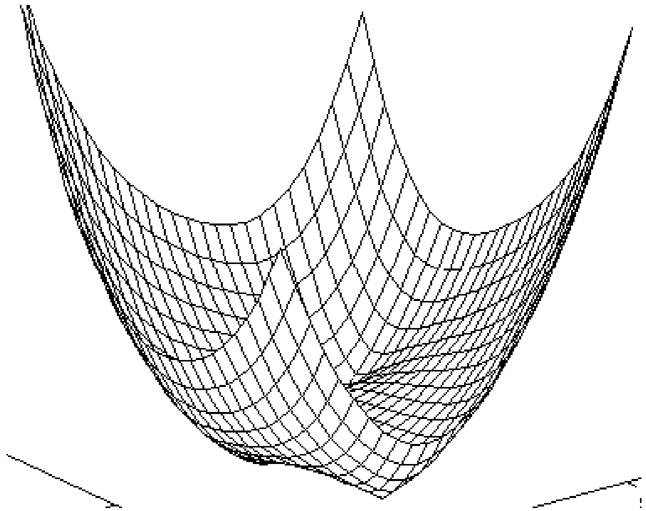
r_j - *расстояние до j-го фокуса*

k - *порядок лемнискаты*

kf-система, kf-лемниската

Семейство kf-лемнискат

Для любого набора фокусов и радиуса это гладкие кривые без самопересечений, с фокусами внутри.

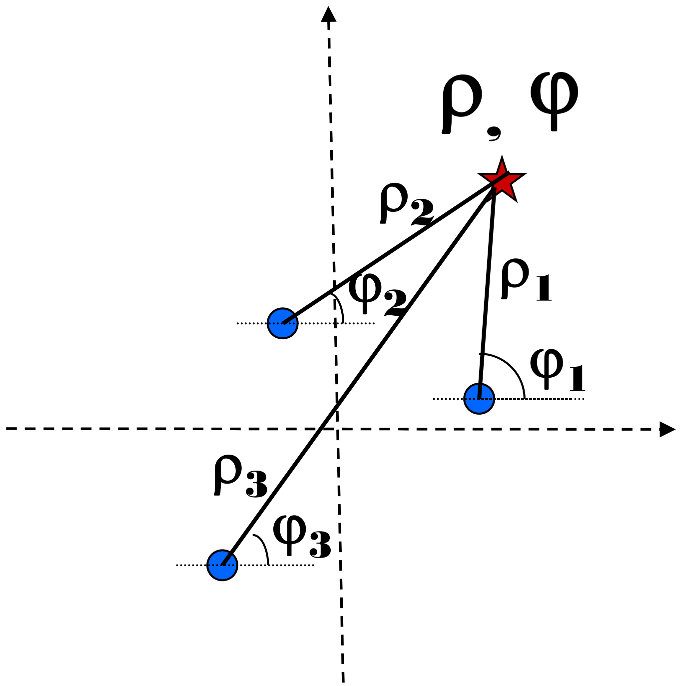


Софокусные лемнискаты образуют семейство кривых, вложенных без пересечений по возрастанию радиуса : от k несвязных окрестностей фокусов до одной окружности

Семейство kf лемнискат монотонно по связности

Полиполярная плоскость лемнискат

Полиполярная система координат является обобщением классического полярного представления в виде полярной плоскости с $k > 1$ *центрами-фокусами, координатами которой также являются радиус и угол, определяемые по отношению к системе фокусов.*

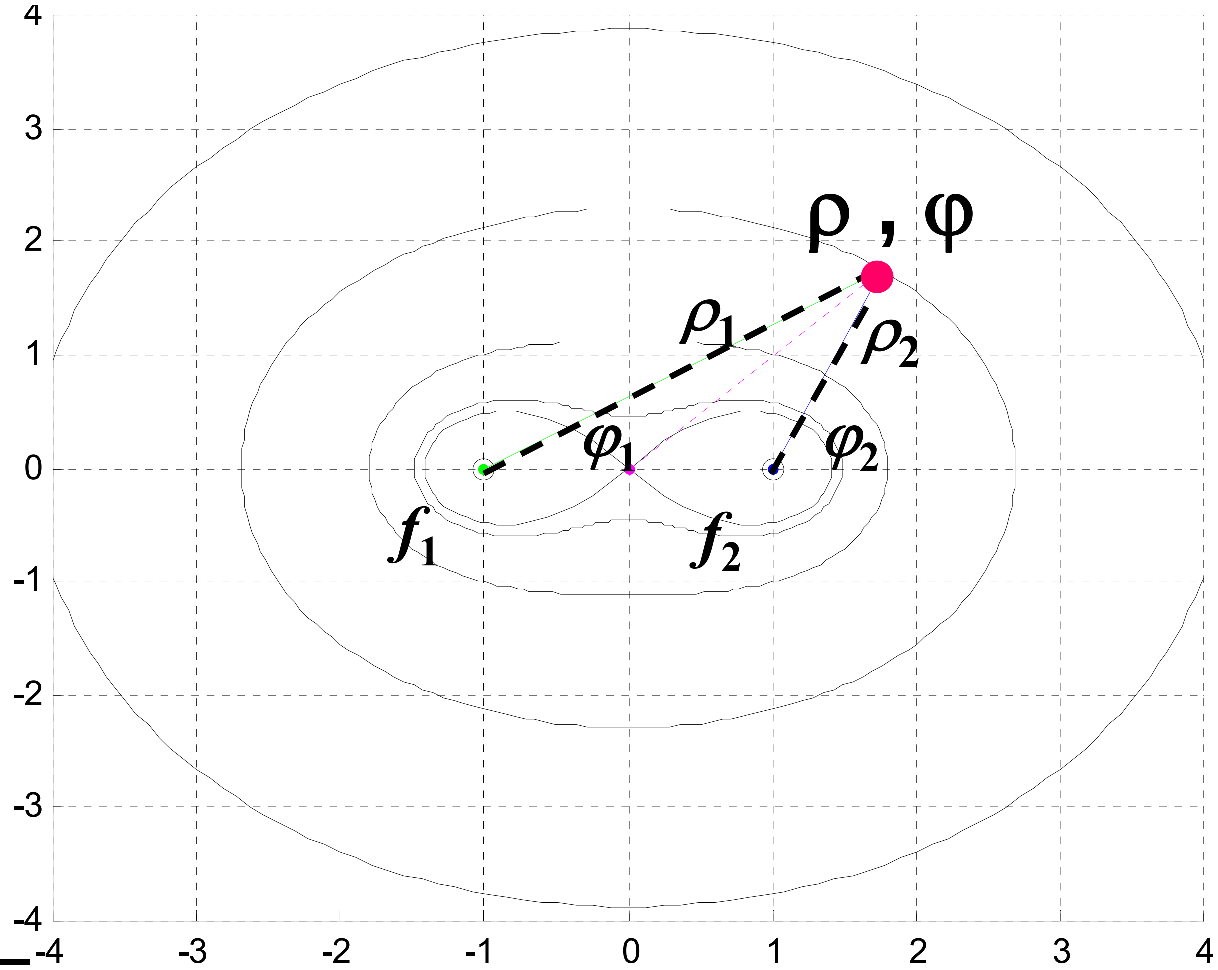


$$\rho = u(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$$

$$\varphi = v(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

Система координат ЛСК

радиальная и угловая компоненты



$$\rho = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} \rho_j}$$

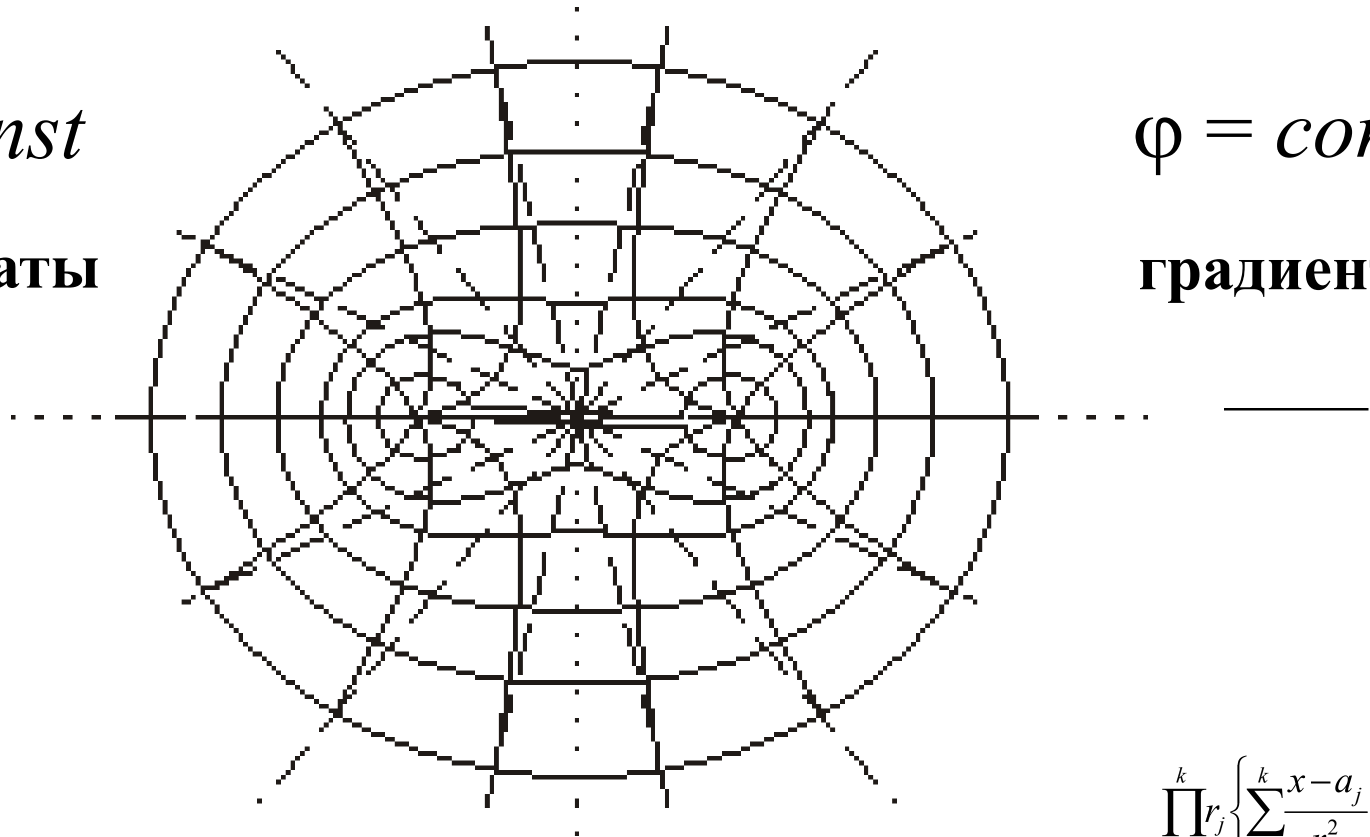
$$\varphi = 1/k \sum_{j=1}^{k} \varphi_j$$

Полиполярная СК

изотермические кривые

$\rho = const$ **лемнискаты**

$\varphi = const$ **градиенты**



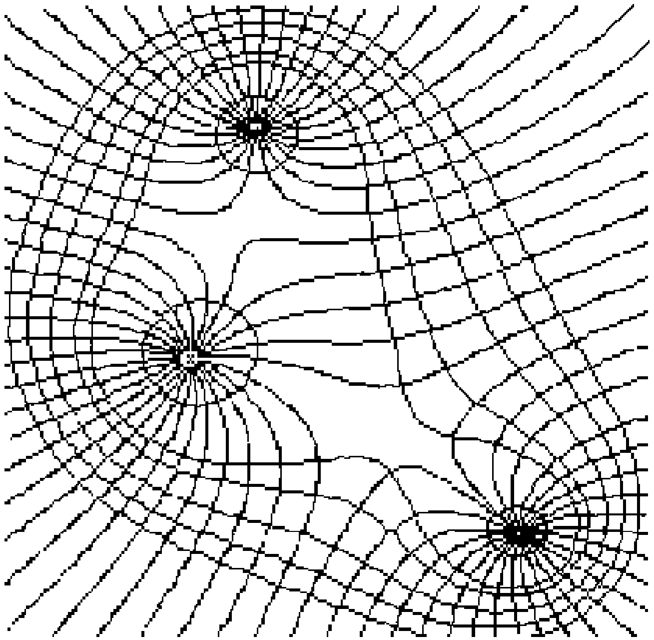
$$\rho^k = \prod_{j=1}^{k} r_j;$$

$$\prod_{j=1}^{k} r_j \left\{ \sum_{j=1}^{k} \frac{x-a_j}{r_j^2}, \sum_{j=1}^{k} \frac{y-b_j}{r_j^2} \right\}$$

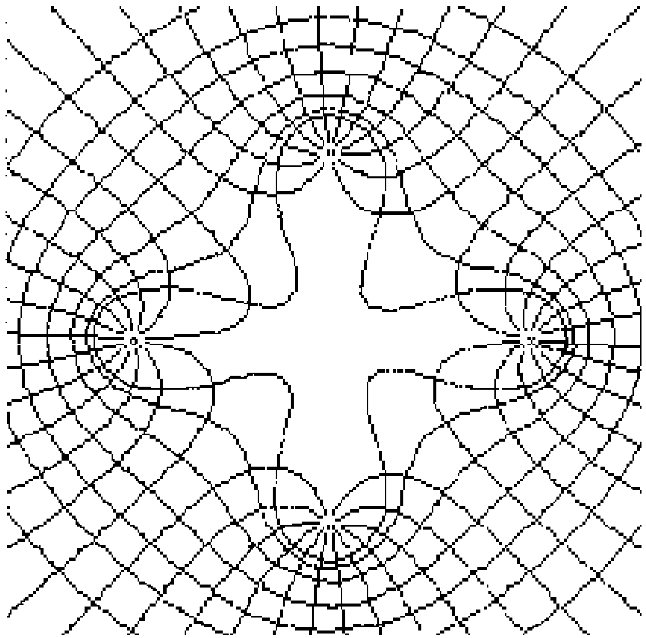
Семейства лемнискат и градиентных кривых образуют ***взаимно ортогональные*** *семейства координатных кривых* $\rho(x,y) = const$ *и* $\varphi(x,y) = const$ *лемнискатической полиполярной плоскости* (*ЛСК*).

Kf-полиполярные ЛСК

3f-ЛСК*,*
не имеющая симметрий



4f-ЛСК
с симметриями квадрата

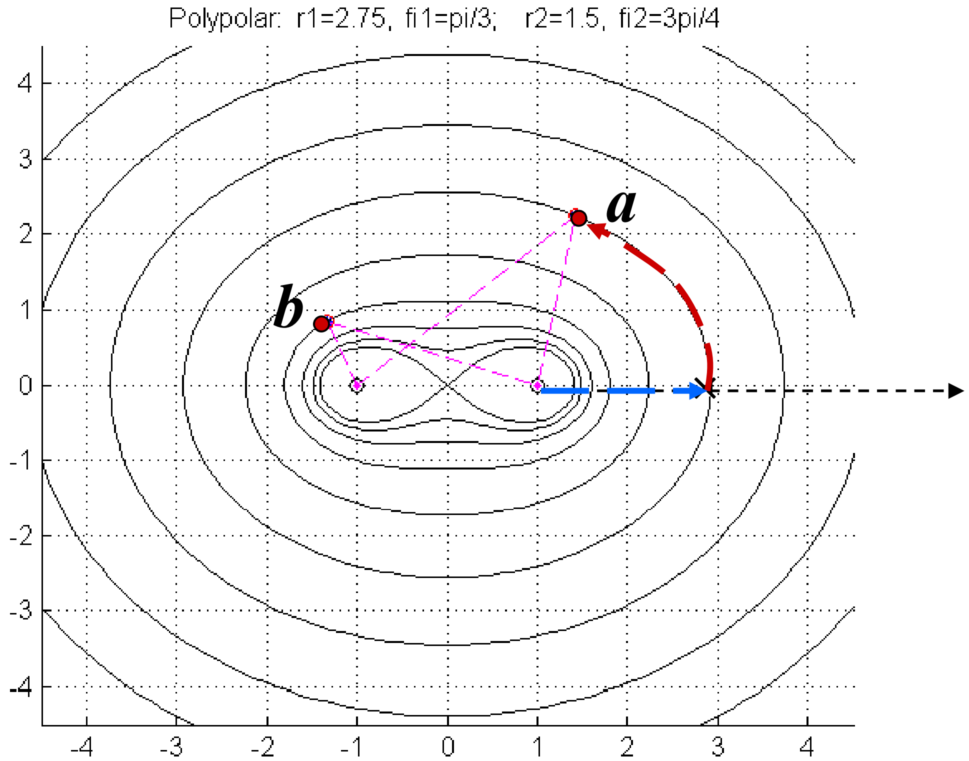


Абстрактная алгебра
на полиполярной плоскости
лемнискат

Полиполярная лемнискатическая ЛСК
позволяет ввести на плоскости
полиполярные числа
и операции с ними
над полем вещественных чисел

ЛСК – точки

- $\boldsymbol{a} = (\rho_a, \varphi_a)$; $\boldsymbol{b} = (\rho_b, \varphi_b)$;



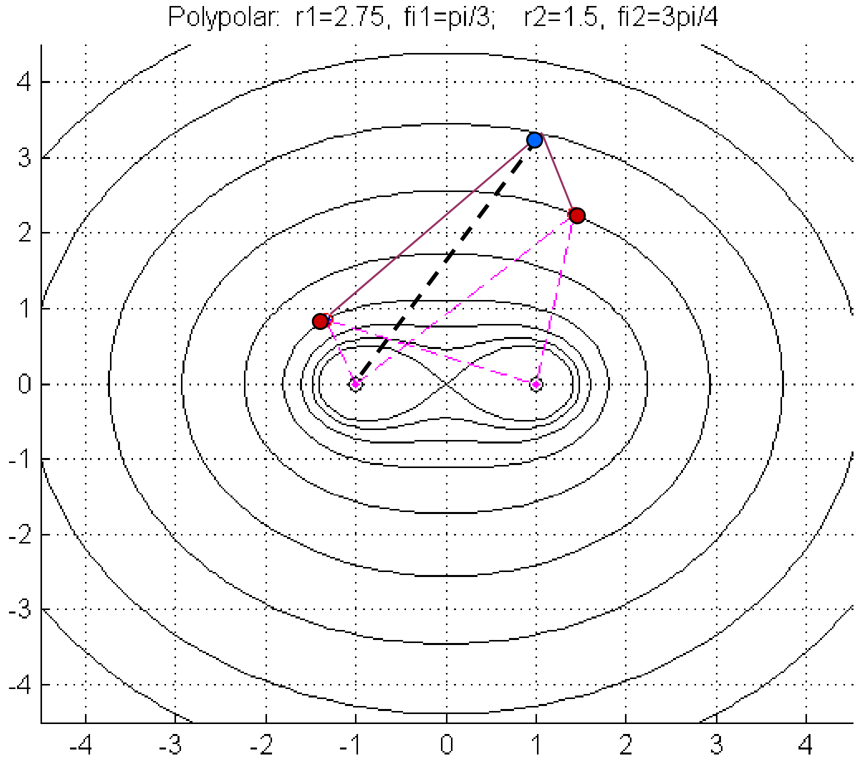
Точка с полиполярными координатами **ρ,φ** строится, используя их *монотонность*, как и в классической СК:

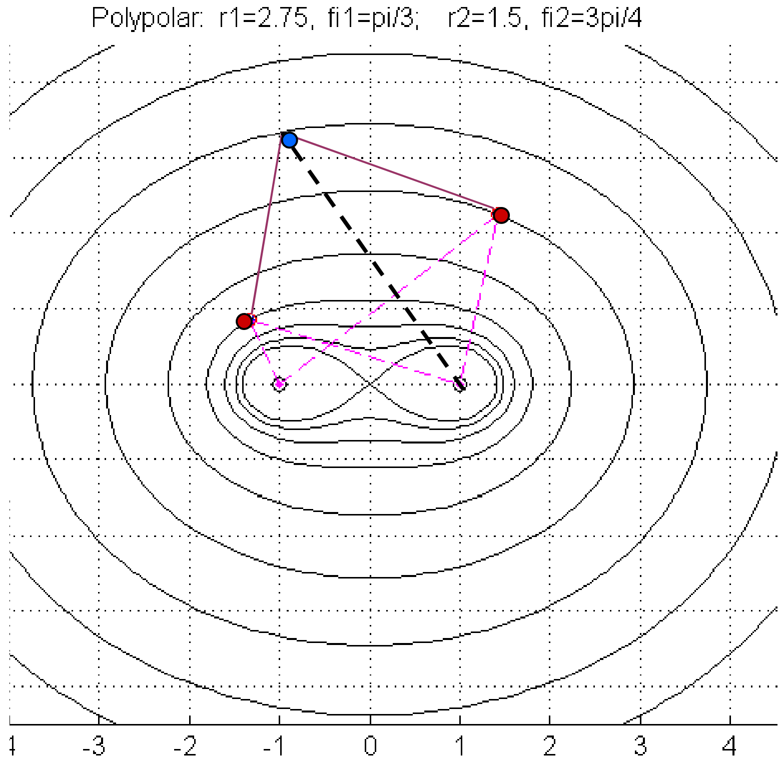
- 1) вдоль полярной оси ищется лемниската с радиусом **ρ**,
  2) вдоль найденной лемнискаты ищется точка с углом **φ**.

Аддитивная операция a+b

$$x1_s = x_a + x_b - xf_1/2 \qquad x2_s = x_a + x_b - xf_2/2$$

$$y1_s = y_a + y_b - yf_1/2 \qquad y2_s = y_a + y_b - yf_2/2$$





Расчет суммы двух чисел:

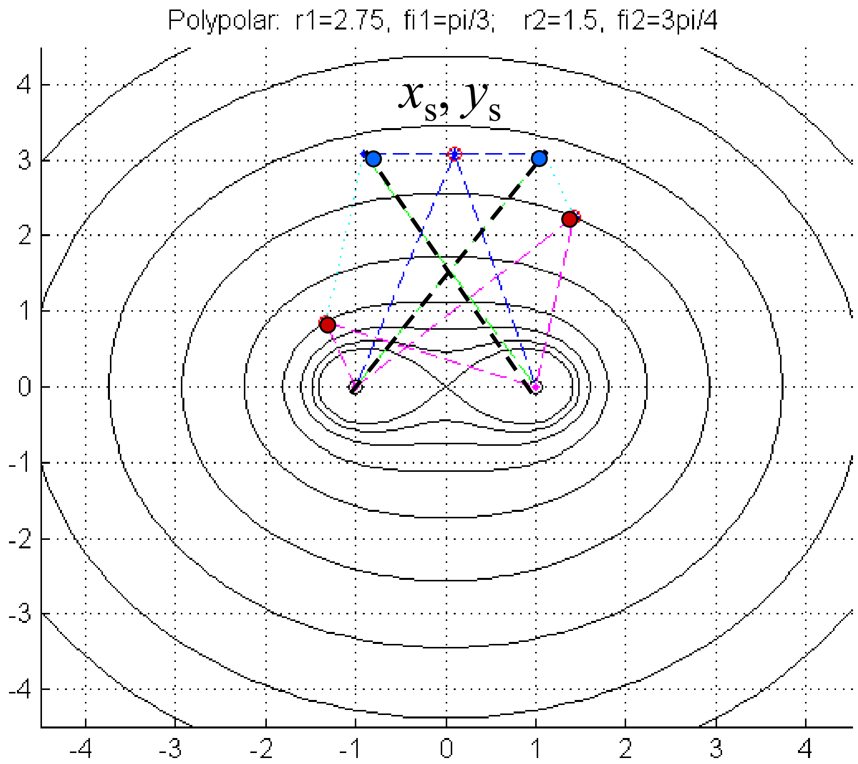
1) относительно каждого фокуса строится

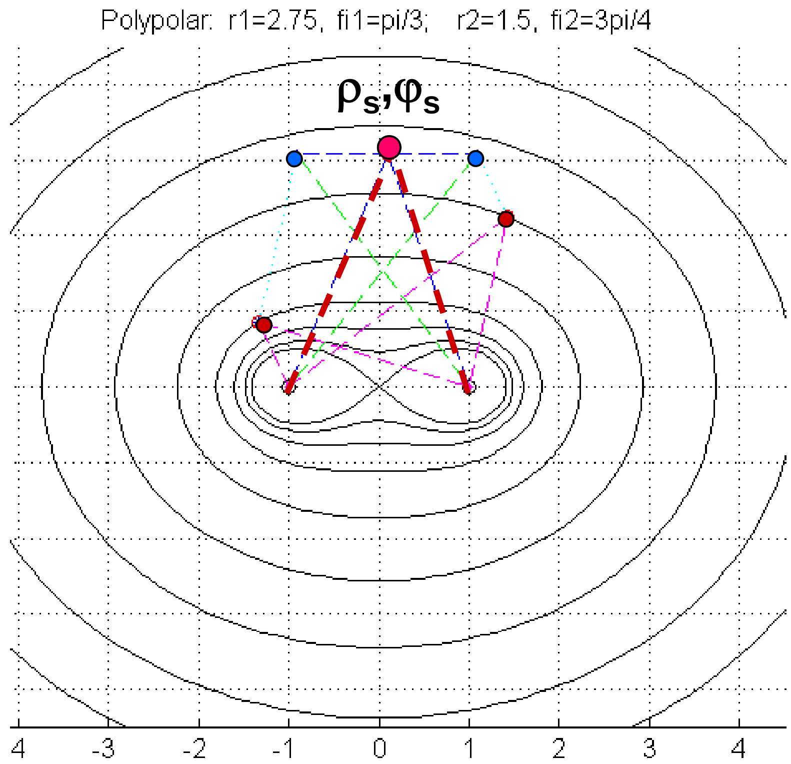
- параллелограмм и его диагональ;

Сумма 2-х элементов

- $\boldsymbol{a + b = b + c}$

$$x_s = (x1_s + x2_b)/2 = \boldsymbol{x_a + x_b - (xf_1 + xf_2)}/2$$
$$y_s = (y1_s + y2_b)/2 = \boldsymbol{y_a + y_b - (yf_1 + yf_2)}/2$$





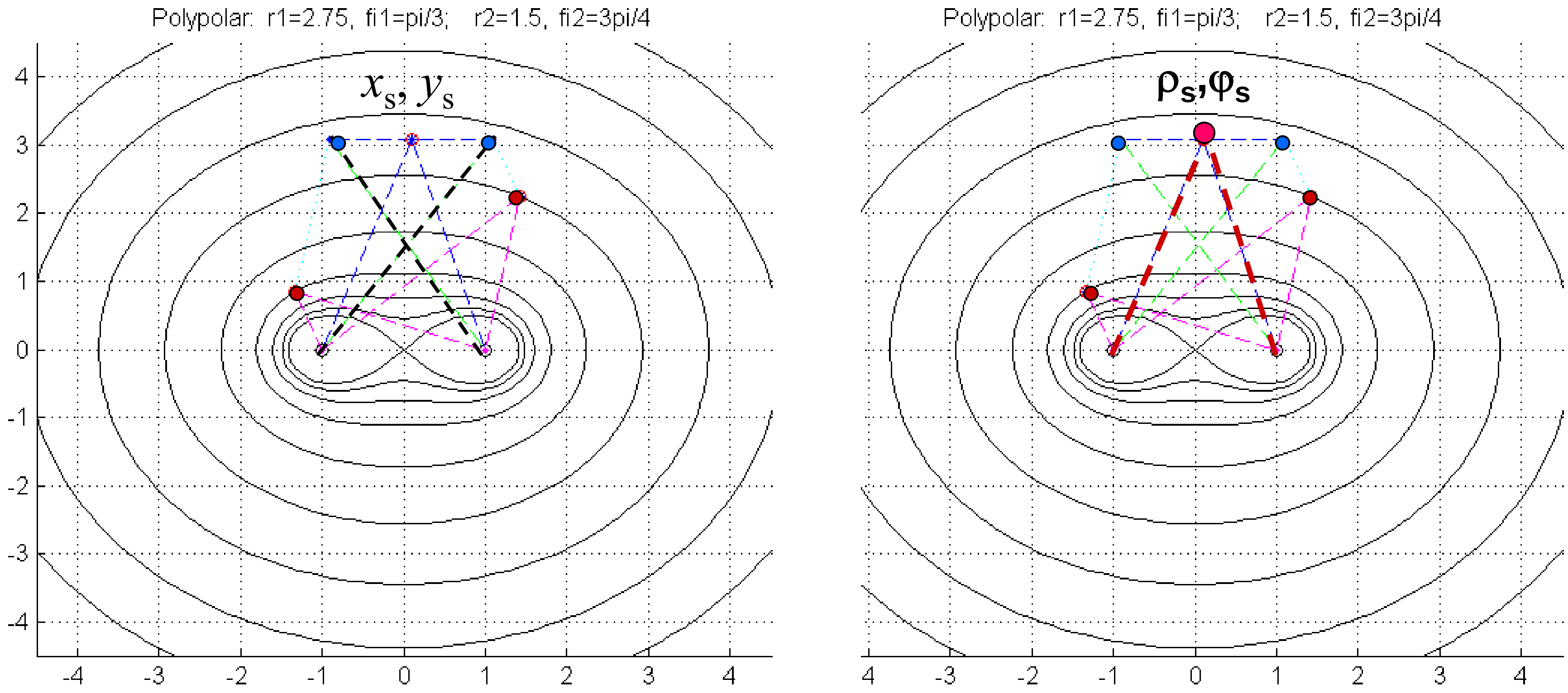
- 2) диагональные точки (от каждого фокуса) усредняются ;
  3) ищутся значения полиполярных координат ρ_s, φ_s

$$\rho = \rho(x_s, y_s)$$
$$\varphi = \varphi(x_s, y_s)$$

Сумма 2-х элементов

- $a + b = b + c$

$$x_s = x_a + x_b - (xf_1 + xf_2)/2$$
$$y_s = y_a + y_b - (yf_1 + yf_2)/2$$

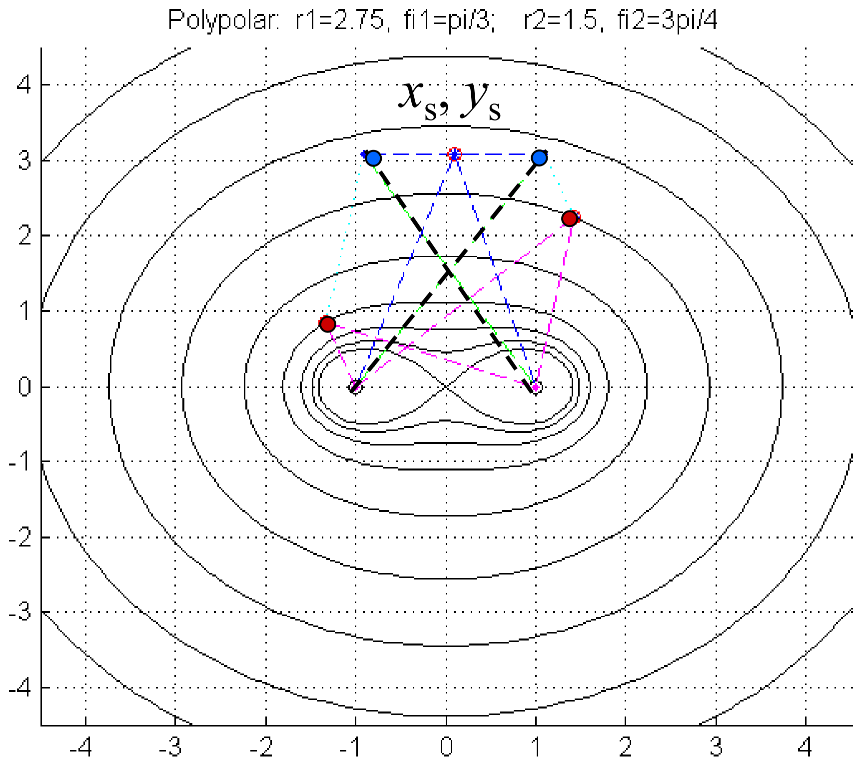


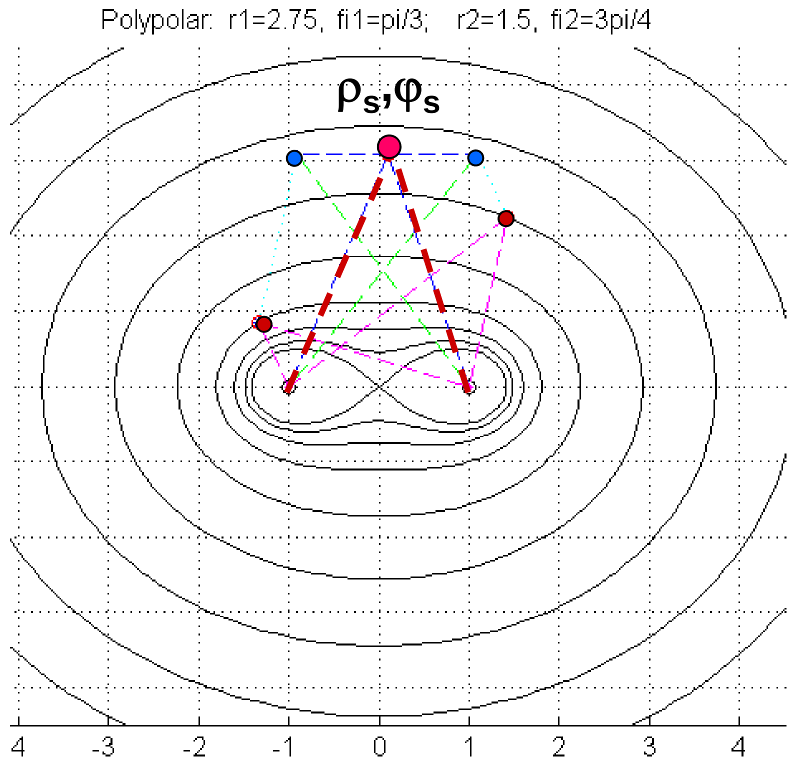
- 2) диагональные точки (от каждого фокуса) усредняются ;
  3) ищутся значения полиполярных координат ρ_s, φ_s

Сумма 2-х элементов

- $a + b = b + c$

$$x_s = x_a + x_b - (xf_1 + xf_2)/2$$
$$y_s = y_a + y_b - (yf_1 + yf_2)/2$$

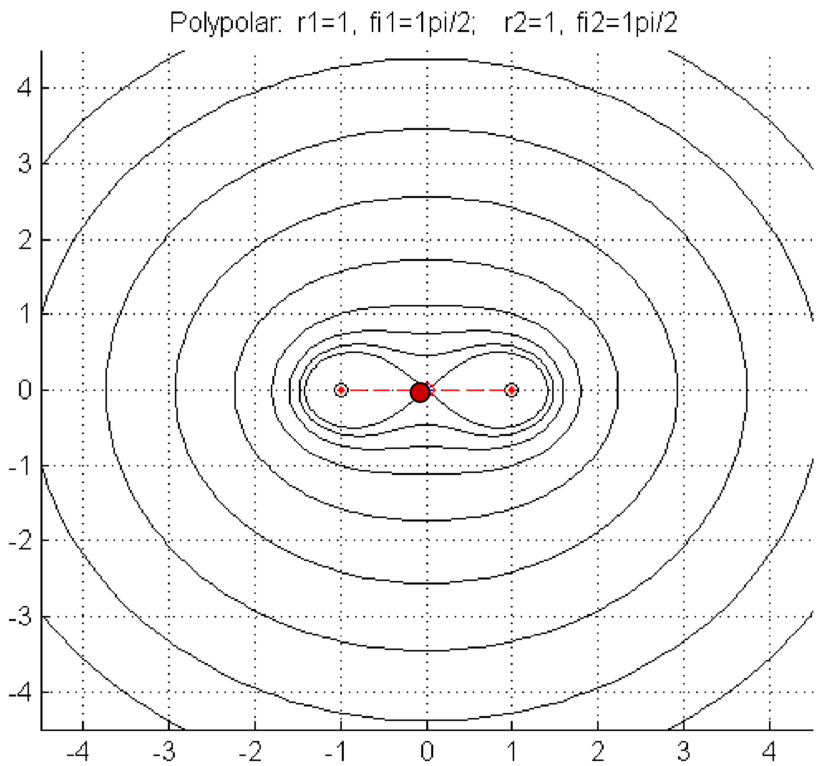




- 2) диагональные точки (от каждого фокуса) усредняются ;
  3) ищутся значения полиполярных координат ρ_s,φ_s

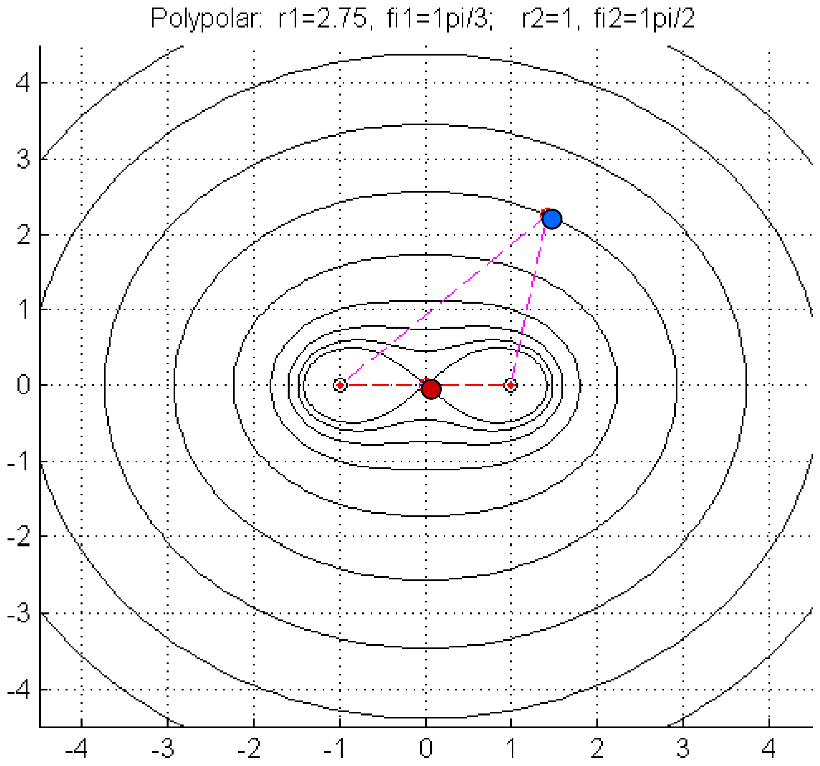
Нулевой элемент 0

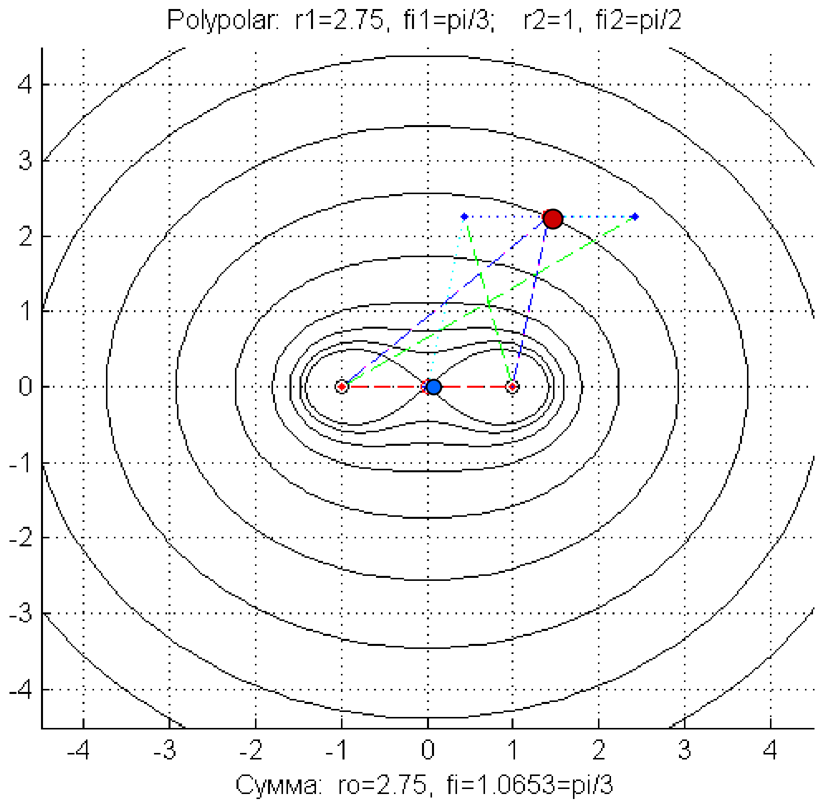
- «**0**»: $\rho = 1,\ \varphi = \pi/2$



«0» - центр симметрии фокусной структуры

$$a + 0 = a + 0 = a$$



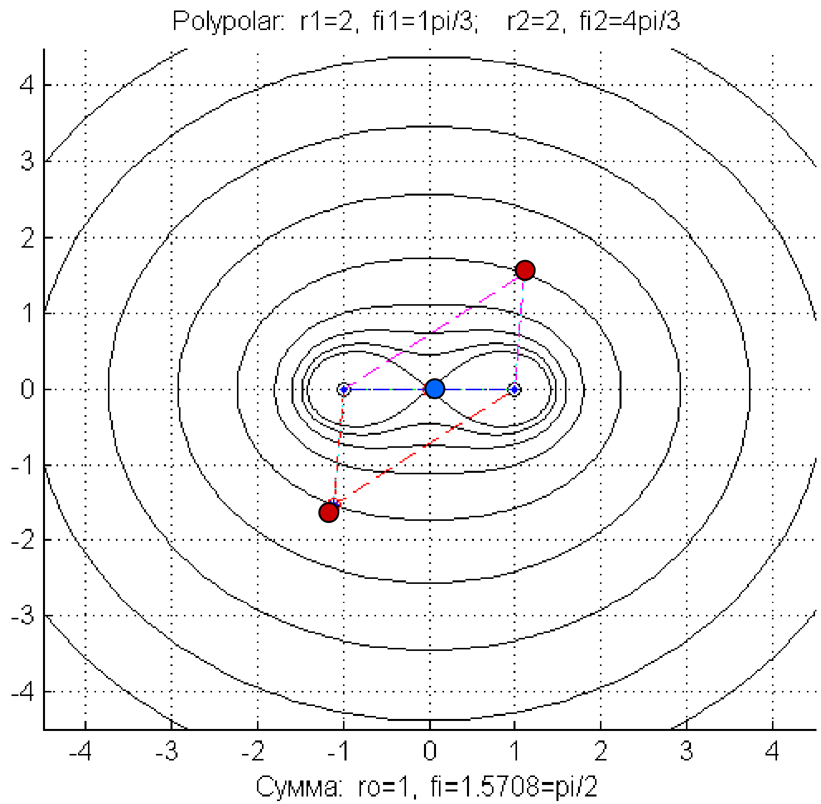


Суммирование произвольного элемента с нулевым не меняет его

Обратный элемент a+(-a)=0

$$\boldsymbol{a} = (\rho_a, \varphi_a); \quad -\boldsymbol{a} = (\rho_b, \pi + \varphi_b);$$

$$(\rho_a, \varphi_a) + (\rho_b, \pi + \varphi_b) = (\rho{=}\mathbf{1}, \varphi{=}\pi/2) \rightarrow «0»$$

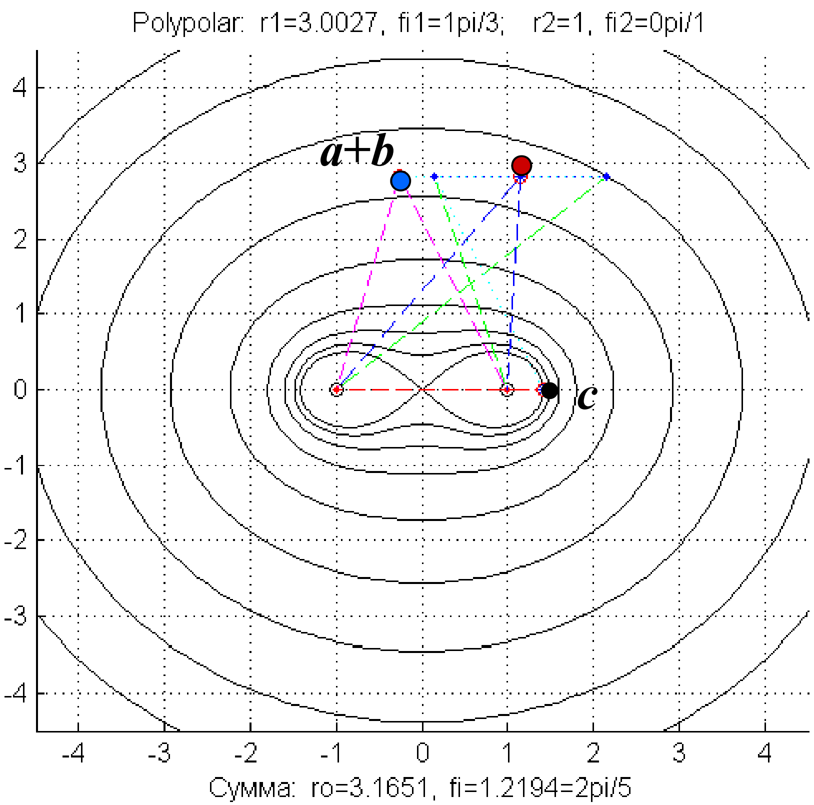


Сумма произвольного элемента и обратного дает нулевой элемент

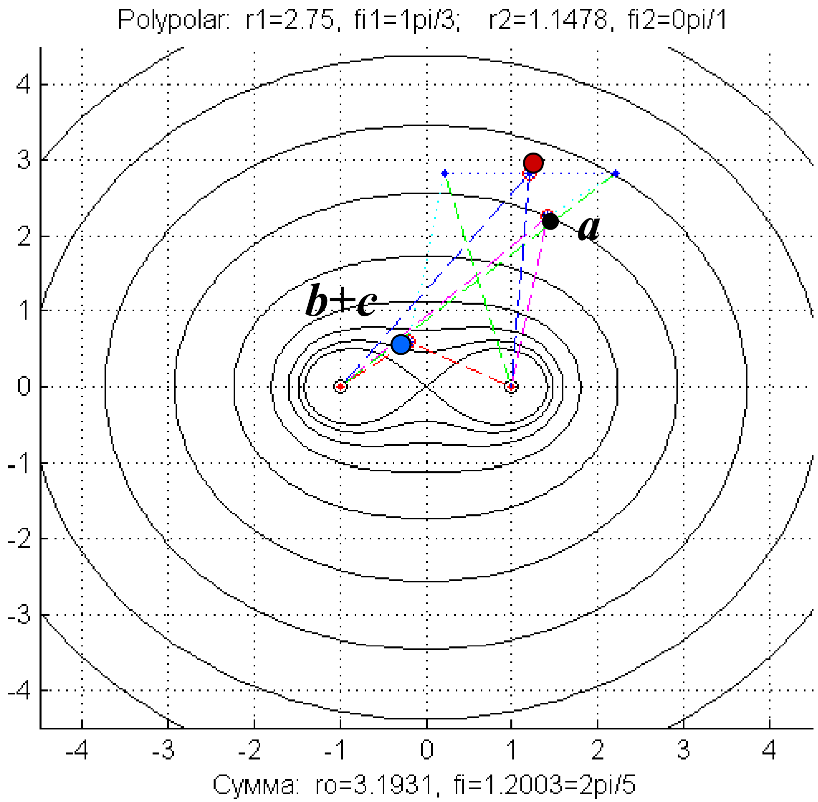
Аддитивная ассоциативность a+b+c

$(a + b) + \mathrm{c} = a + (b + \mathrm{c})$

● $(a + b) + \mathrm{c}$



● $a + (b + \mathrm{c})$



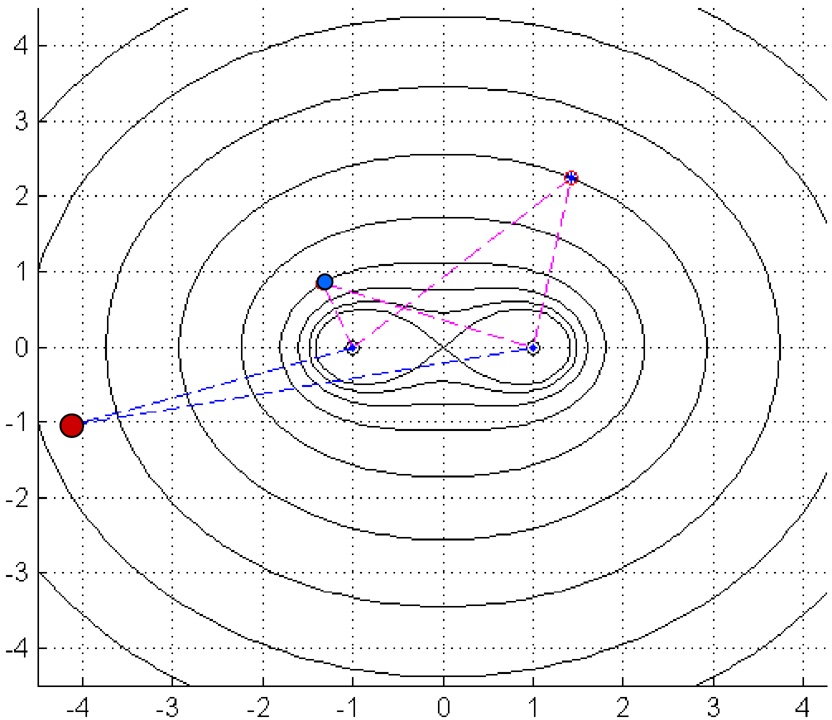
● $a = (2{,}75;\ 1/3\pi)$; $b = (1{,}5;\ 3/4\pi)$; c = «1»

Мультипликативная операция a×b

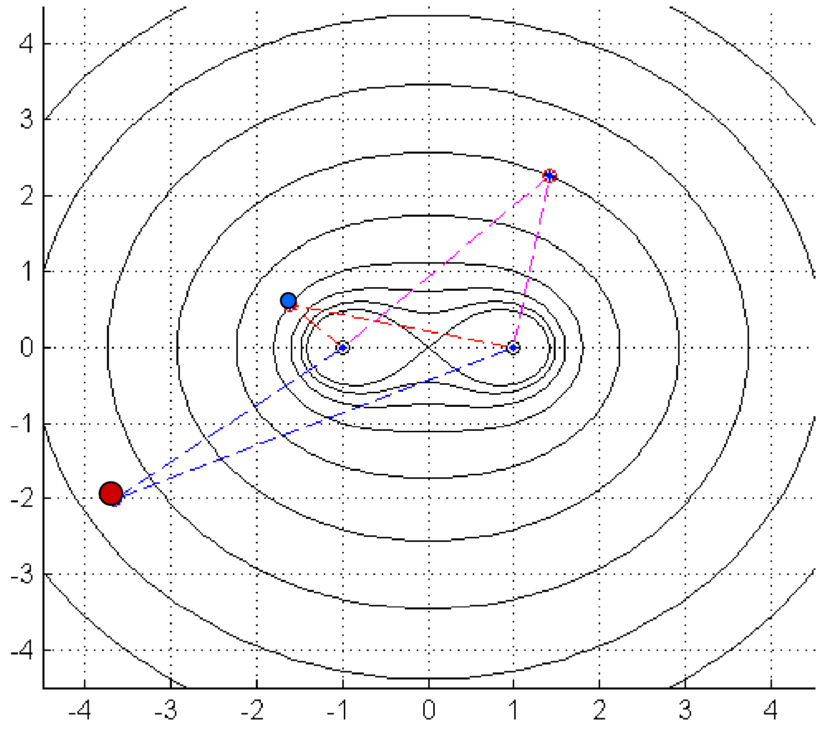
произведение 2-х элементов

$$\rho = \rho_a \times \rho_b$$
$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b$$

- $a \times b_1 = b_1 \times a$



- $a \times b_2 = b_2 \times a$

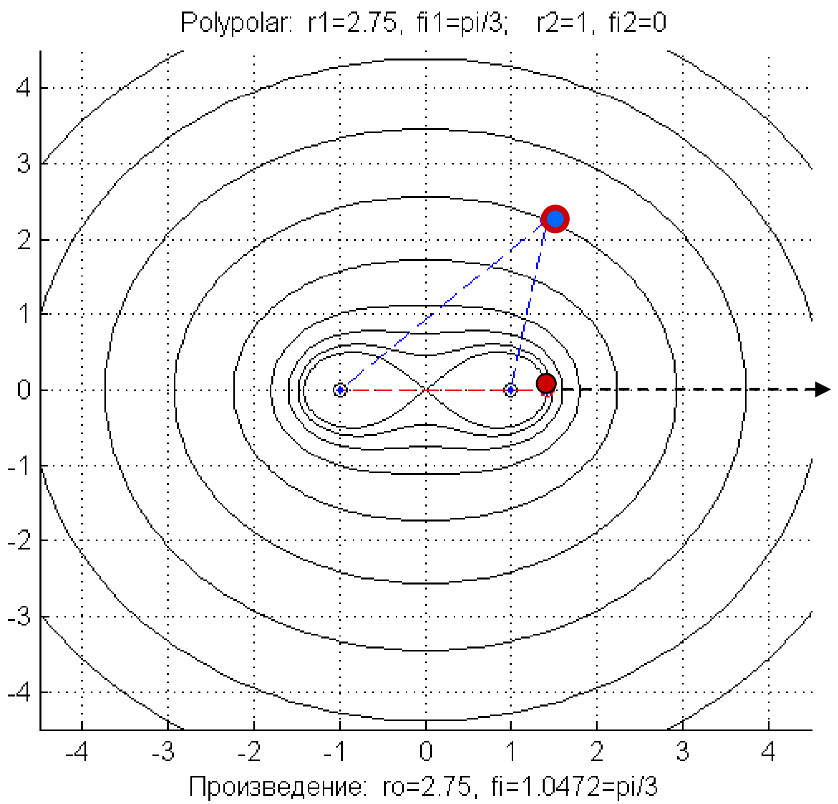


1) ищется лемниската с радиусом $\rho = \rho 1 \times \rho 2$
2) ищется угол на лемнискате $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$

Мультипликативная операция

с единичным элементом $a \times 1 = 1 \times a = a$

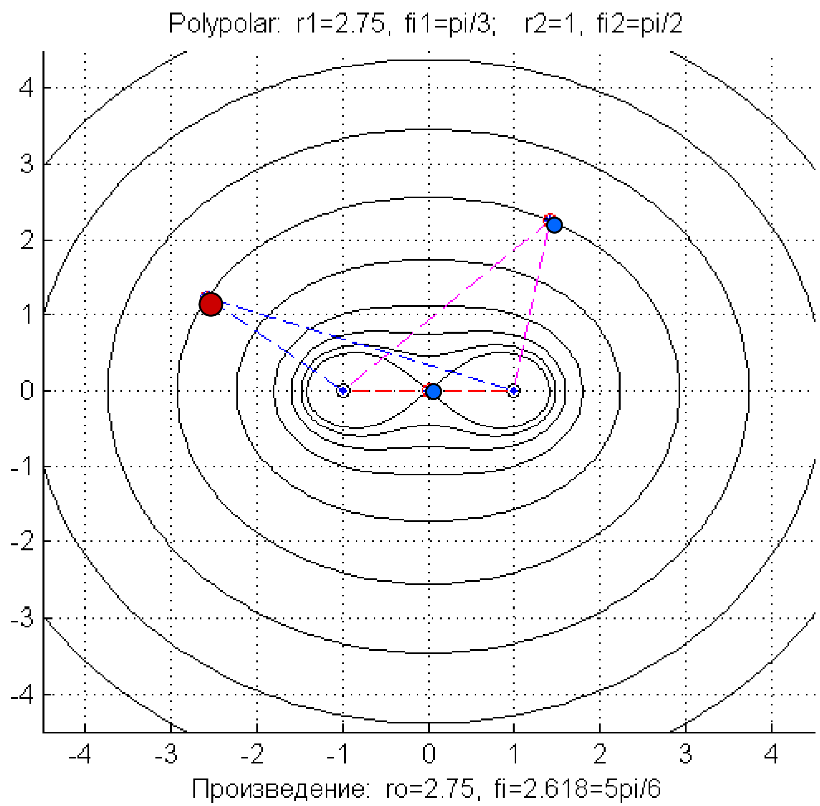
«1»: $\rho = 1, \ \varphi = 0$



Произведение единичного элемента с произвольным не меняет его

Мультипликативная операция
с нулевым элементом a×0

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{«0»} = (\rho_a,\ \varphi_a + \pi/2)$



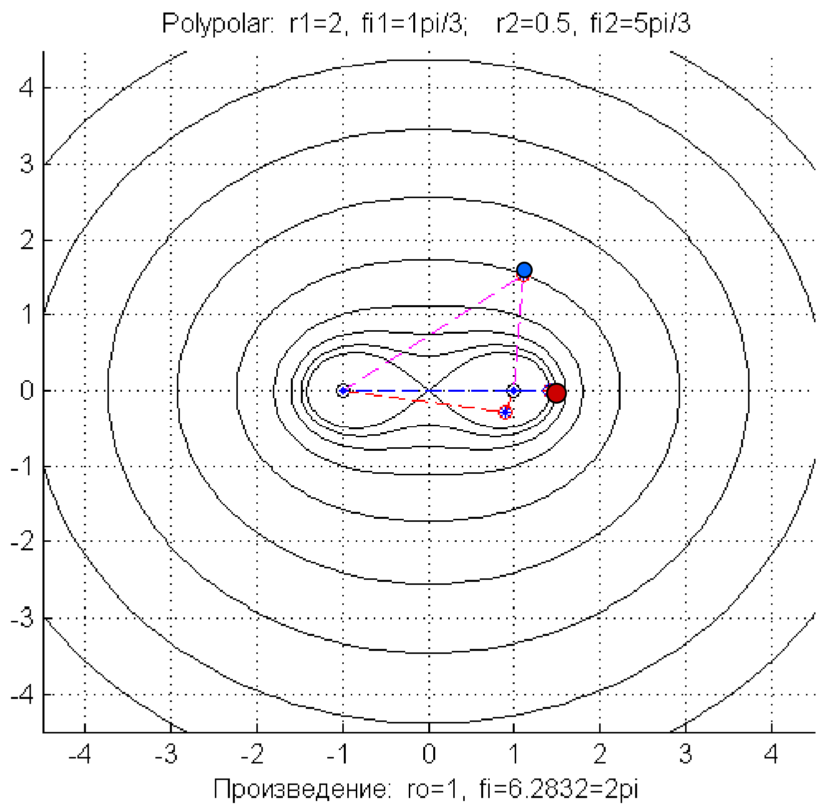
Произведение произвольного элемента с нулевым меняет его ориентацию на $\pi/2$

Мультипликативный

обратный элемент $a \times a^{-1} = 1$

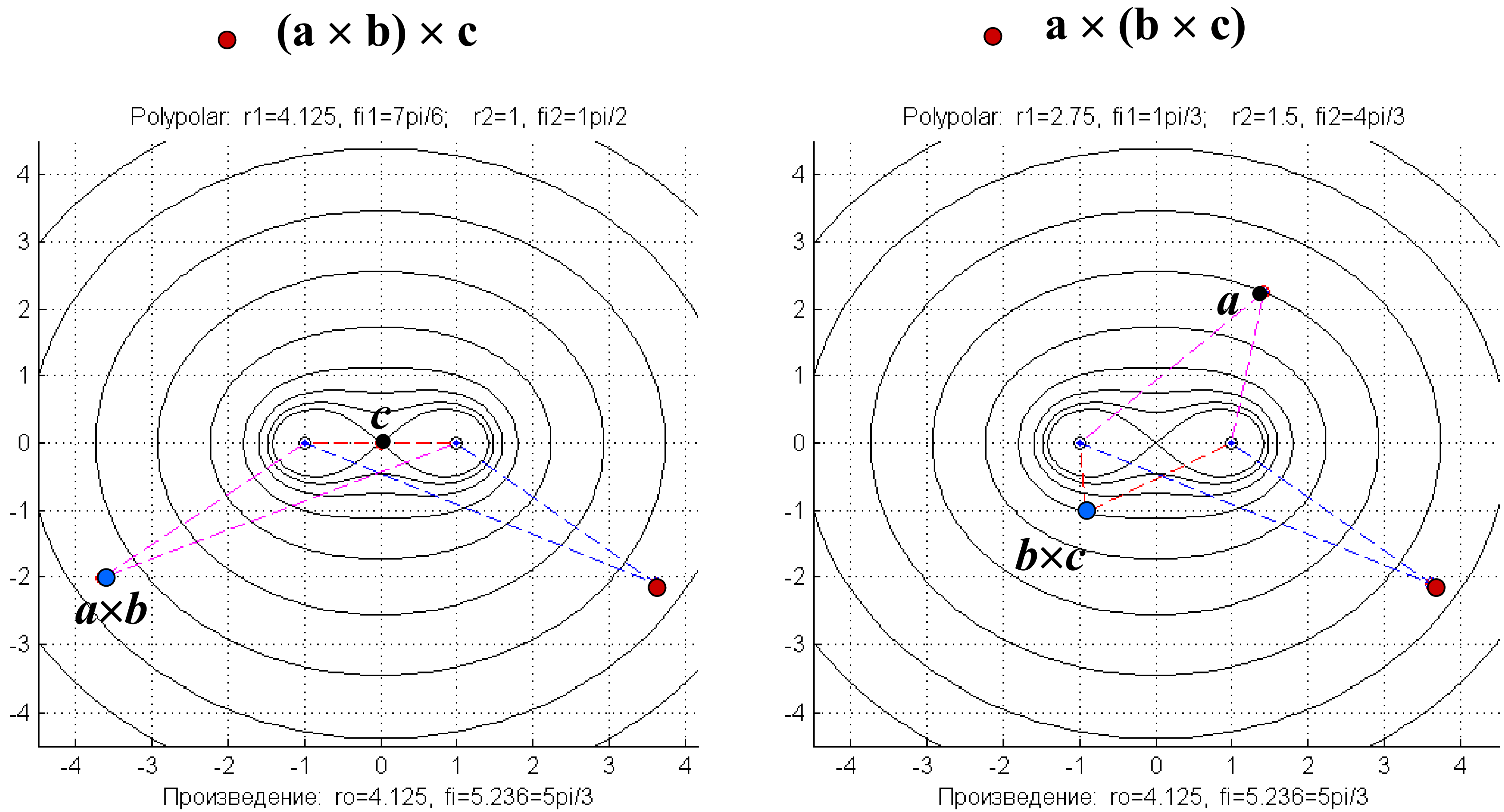
- $a = (\rho, \varphi)$; $1/a = (1/\rho, -\varphi)$; $a \times 1/a = (1, 0)$;

- ***a*×1/a = «1»**



Произведение произвольного элемента и обратного дает единичный

Мультипликативная ассоциативность a×b×c

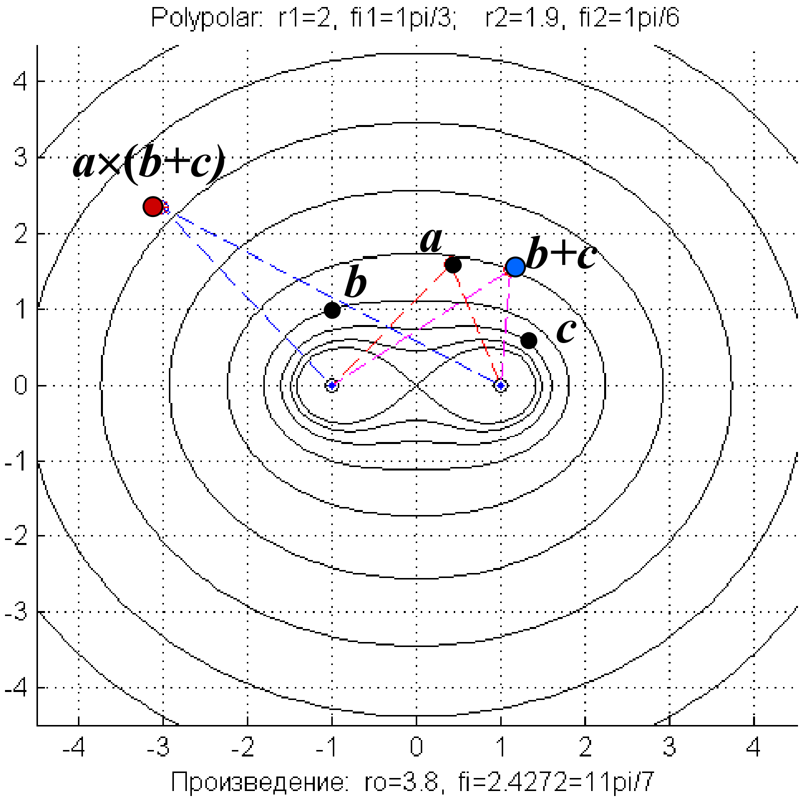


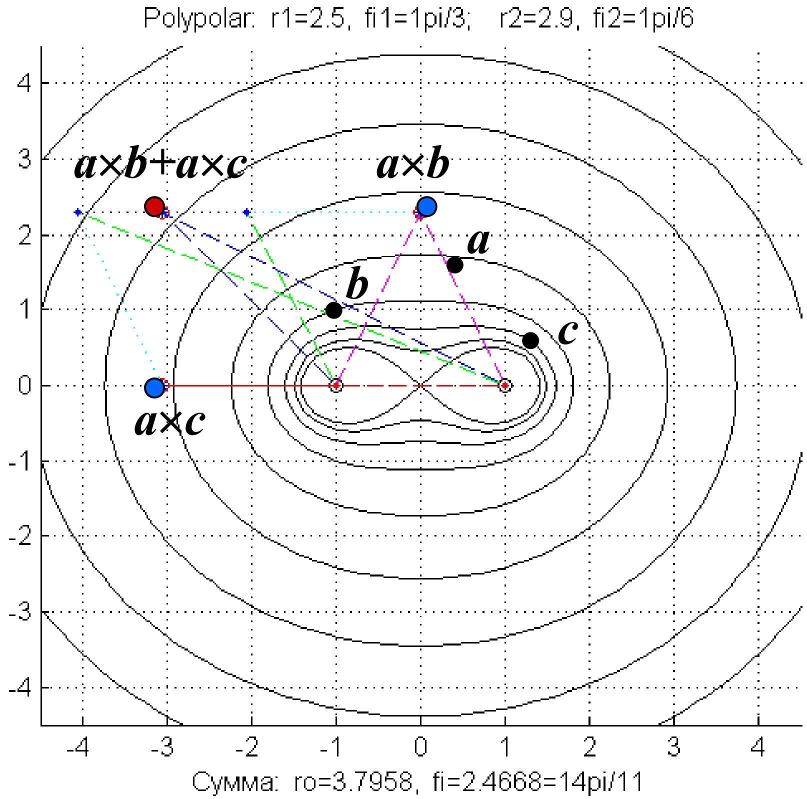
a = (2,75; π/3); *b* = (1,5; 5 π/6); c = «0»

Произведение 3-элементов ассоциативно

Аддитивно-мультипликативная *дистрибутивность*

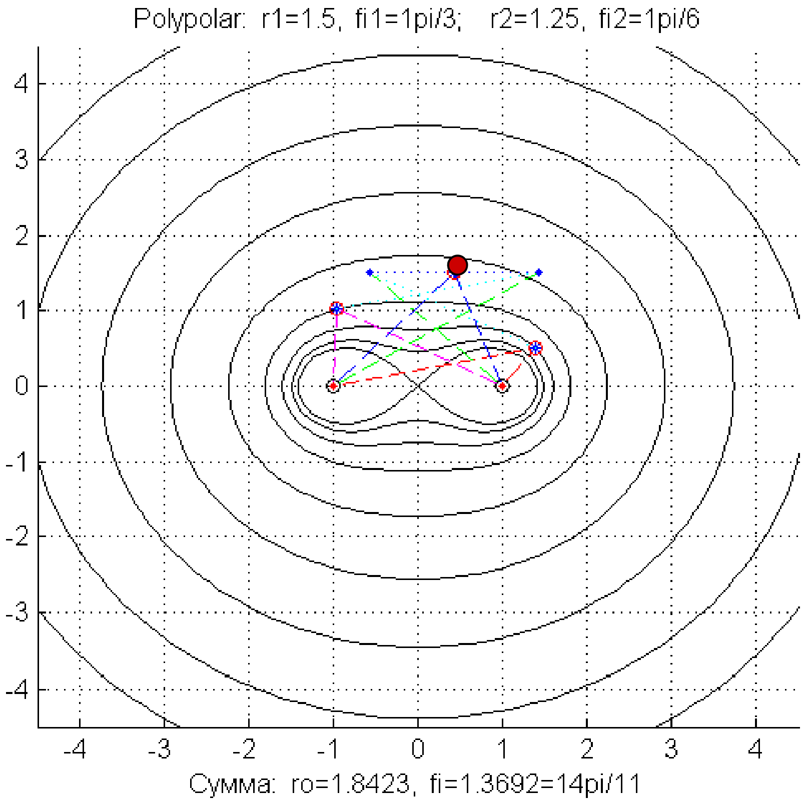
- $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$

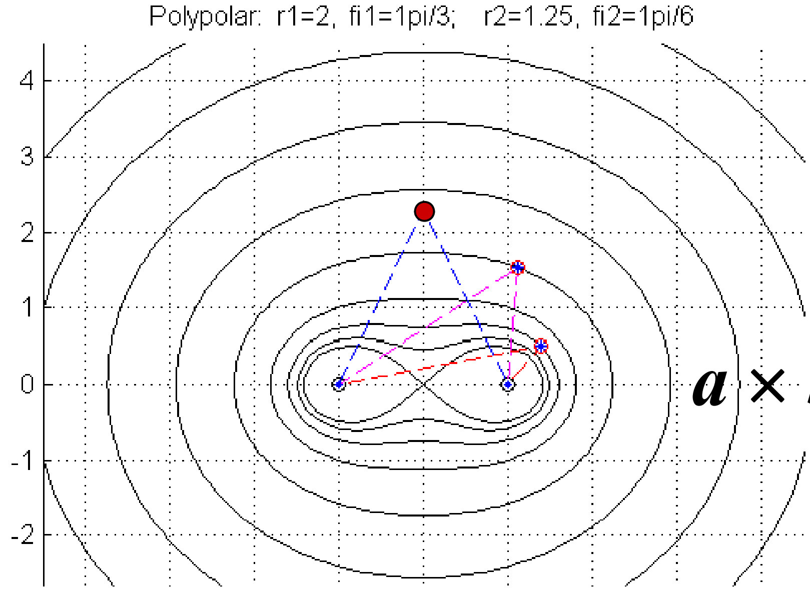




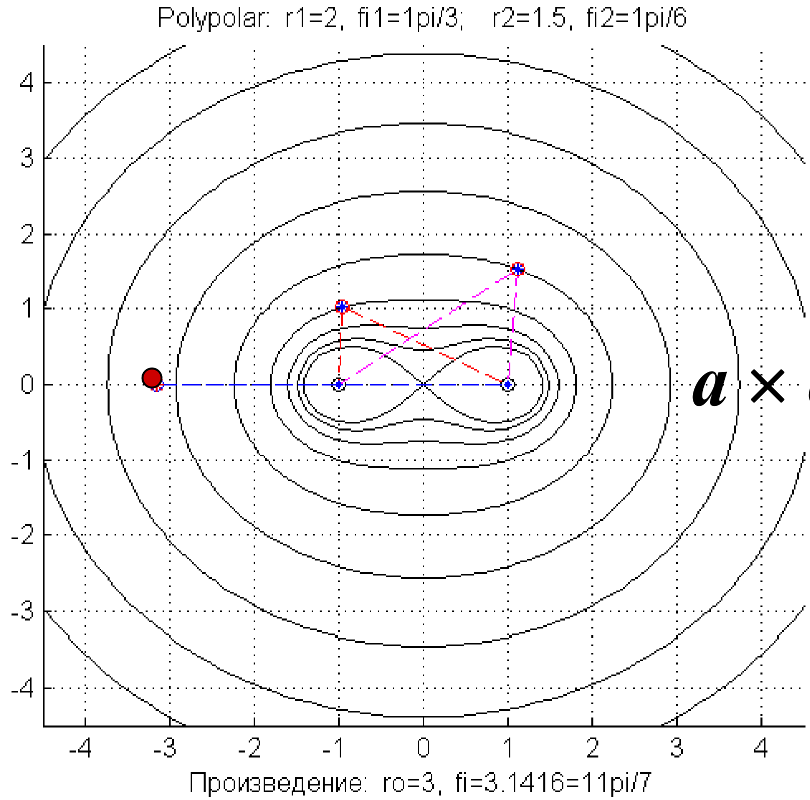
- **3 элемента:** $a = (2.0, \pi/3)$; $b = (1.25, \pi/6)$; $c = (1.5, 2\pi/3)$

дистрибутивность





$a \times b$



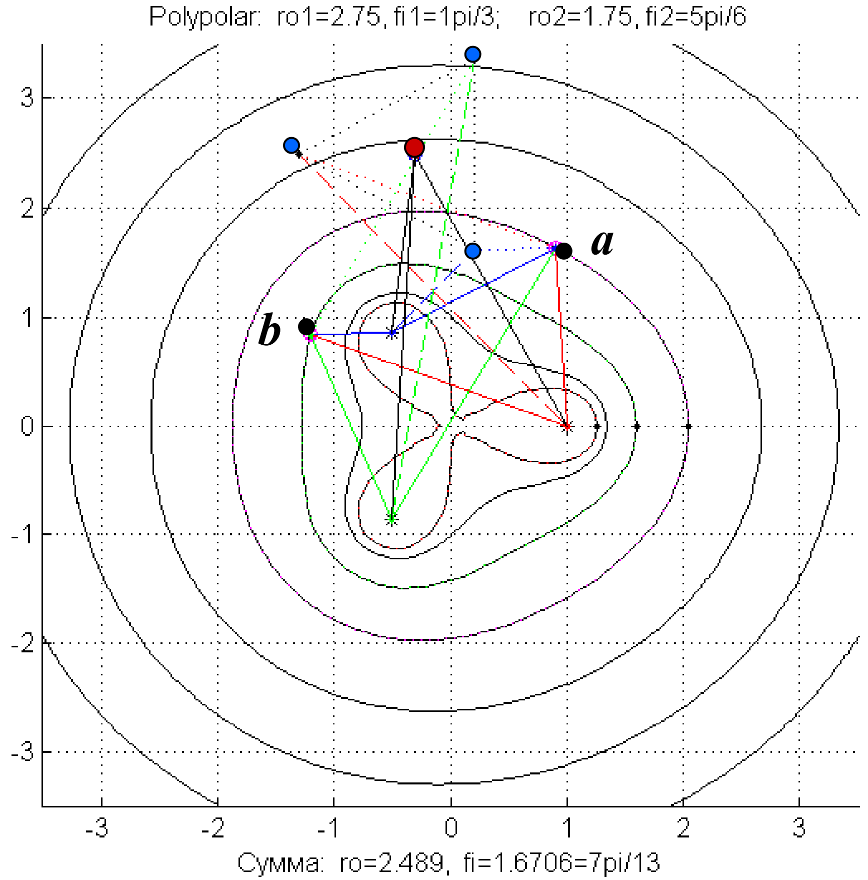
$a \times c$

• $b + c$

Аддитивная операция a+b

- $a + b = a + b$

3f-LSC

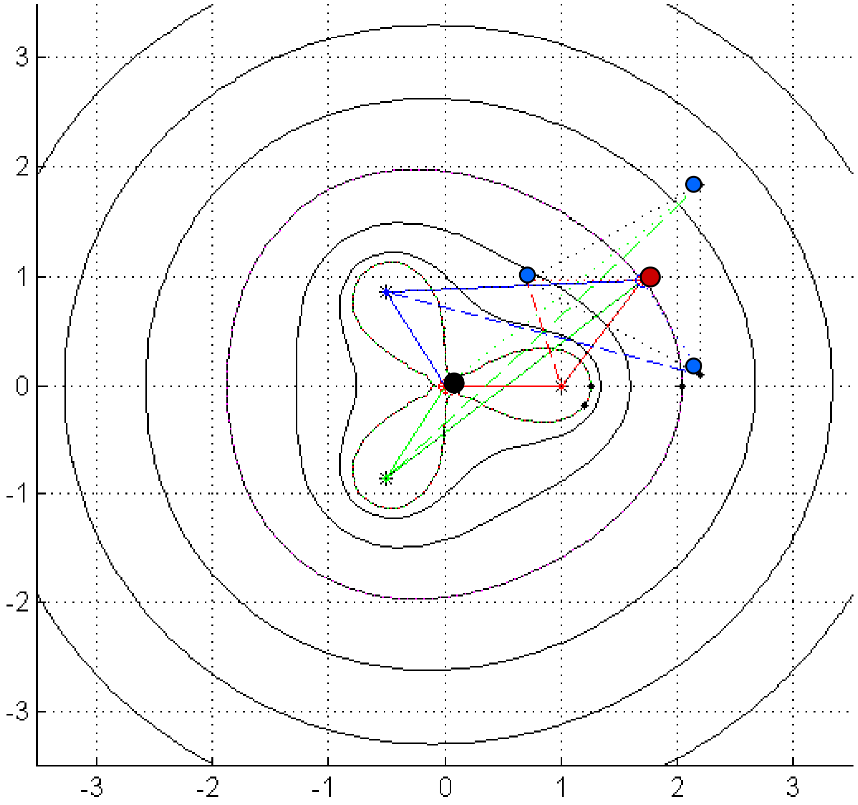


Сумма двух чисел: вычисляется как средняя точка по трем диагональным построениям относительно каждого фокуса

Аддитивный
нулевой элемент a+0

- $a + 0 = 0 + a = a$

3f-LSC

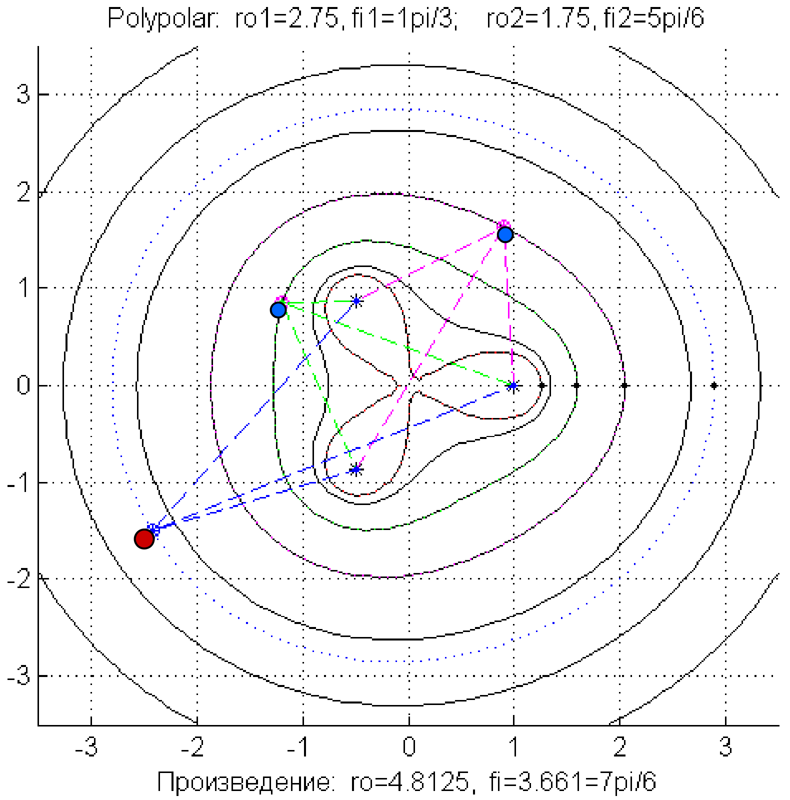


- $a = (2.0, \pi/3)$; **0 = (1, π/3)**

Мультипликативная операция a×b

- $a \times b = b \times a$

3f-LSC



$$\rho = \rho_a \times \rho_b$$

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b$$

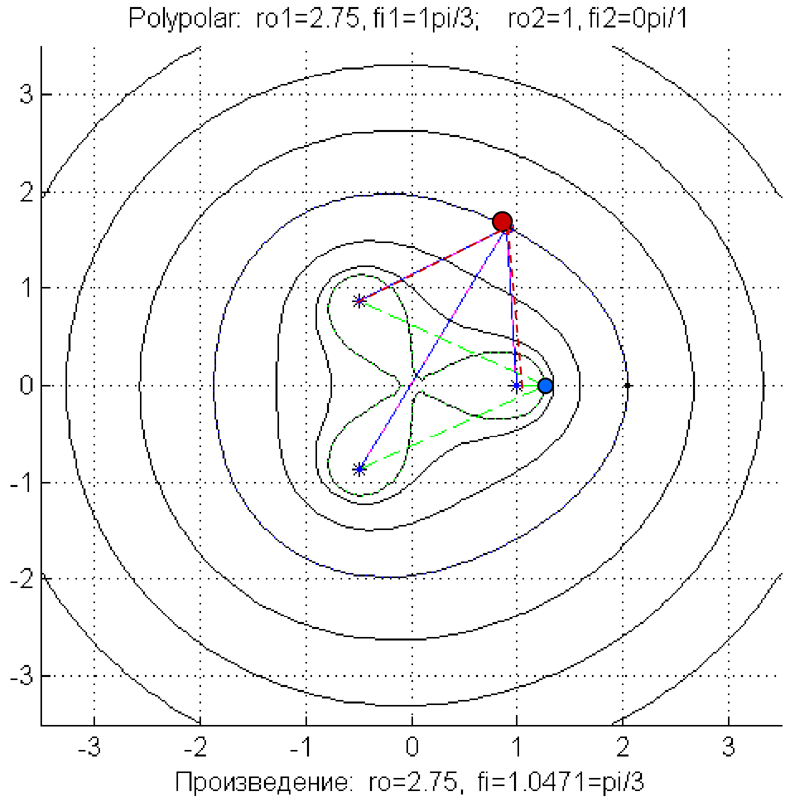
- a = (2.75, π/3); b = **(1.75, 5π/6)**

Мультипликативный

единичный элемент

- $a \times 1 = 1 \times a = a$

3f-LSC



- Единичный элемент: $\rho = 1$; $\varphi = 0$

Фрактальные структуры

Благодарю за внимание

rta_ra@list.ru