Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

Мокин А.Ю.
E-mail: MknAndrew@mail.ru

26 января 2011

Изучаются условия существования регулярного решения нелокальной задачи теплопроводности

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
&u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) + \alpha u(1,t), \quad t > 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ – вещественный параметр.

Задача (1) при $\alpha = 0$ известна как задача Самарского-Ионкина и подробно исследована в [1], где доказано существование её регулярного решения для любой $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = 0$.

---

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. // Дифф.ур.1977. Т.13,№ 2. С.294-304.

В работе [2] рассмотрен случай $\alpha > 0$. Для существования регулярного решения требовалось, чтобы $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) + \alpha\varphi(1)$ при соответствующем значении α.

В настоящей работе доказано, что задача (1) имеет регулярное решение при любой $\varphi(x)$ из пространства Соболева $W_2^1[0,1]$, которая обращается в нуль на левом конце отрезка.

---

2. Мокин А.Ю. Метод разделения переменных для задач с нелокальными граничными условиями. Сб. трудов 15 конференции МКО. Изд. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевск 2008. Т.2. С. 46-54.

Решение задачи (1) получено методом разделения переменных. Рассмотрим оператор

$$Au = -\frac{d^2}{dx^2}\, u,\ 0 < x < 1, \quad u(0) = 0,\ u'(0) = u'(1) + \alpha u(1),$$

а также для сопряжённого к нему в смысле скалярного произведения пространства $L_2[0, 1]$, который имеет вид

$$A^* v = -\frac{d^2}{dx^2}\, v,\ 0 < x < 1, \quad v(0) = v(1),\ v'(1) + \alpha v(1) = 0.$$

Задача на собственные значения для операторов A, A^* решена в явном виде. В решении используются свойства одного трансцендентного уравнения.

Уравнение

$$\operatorname{tg} y = 0.5\alpha/y, \quad y > 0$$

при любом положительном α имеет счётное множество решений $y_0, y_1, y_2, \ldots$, удовлетворяющих неравенствам

$$\pi k < y_k < \pi k + \pi/2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Разность $\delta_k = y_k - \pi k$ стремится к нулю с ростом номера k, причём

$$0 < \delta_k < \alpha/(2\pi k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Функция $X_0(x) = \sin(2y_0x)$, а также функции

$$X_{2k-1}(x) = \sin(2\pi kx),\ X_{2k}(x) = \sin(2y_kx), \quad k = 1, 2, \ldots$$

являются собственными для оператора A. Соответствующие собственные значения определены равенствами

$$\lambda_{2k} = (2y_k)^2,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda_{2k-1} = (2\pi k)^2,\ k = 1, 2, \ldots$$

Числа λ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ являются собственными для сопряжённого оператора A^*, им отвечают собственные функции

$$Y_{2k}(x) = C_{2k}\cos(y_k(1 - 2x)),\ \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$Y_{2k-1}(x) = C_{2k-1}\cos(2\pi kx + \psi_k),\ \ k = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi_k = \arctan(\alpha/(2\pi k))$, $k = 1, 2, \ldots$

Особенность задачи (1) заключается в том, что система собственных функций оператора A не образует базиса Рисса пространства $L_2[0,1]$, что существенно затрудняет применение метода разделения переменных. Здесь и далее свойство базисности понимается в смысле следующего определения (см. [3]).

Определение 1. *Система функций* $X_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *образует базис Рисса в пространстве* $L_2[0,1]$, *если эта система является образом полной ортонормированной системы под действием линейного ограниченного обратимого оператора, определённого в* $L_2[0,1]$.

---

3. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. Уч. зап. МГУ, №4, вып. 148, с.69-107, М, 1951.

Решение задачи (1) удобно представить в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} T_k F_k(x), \quad T_k = T_k(t),\ k=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

по вспомогательной системе функций $F_j(x)$, $j=0,1,2,\ldots$, где

$$F_0(x)=(2\delta_0)^{-1}X_0(x), \quad F_{2k}(x)=X_{2k-1}(x),$$
$$F_{2k-1}(x)=(2\delta_k)^{-1}(X_{2k}(x)-X_{2k-1}(x)),\ \ k=1,2,\ldots$$

Система функций $F_j(x)$, $j=0,1,2,\ldots$ при каждом $\alpha>0$ образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,1]$. Взаимный к нему базис состоит из функций $G_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$, где $G_0(x)=2\delta_0 Y_0(x)$,

$$G_{2k-1}(x)=2\delta_k Y_{2k}(x),\ G_{2k}(x)=Y_{2k}(x)+Y_{2k-1}(x),\ k=1,2,\ldots$$

В работе [2] получен явный вид коэффициентов $T_j(t)$, а также доказана

Теорема 1. *Если ряд, составленный из коэффициентов φ_j разложения функции $\varphi(x)$ по базису $F_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходится абсолютно, то задача (1) имеет регулярное решение, представимое в виде ряда (2).*

Тем самым, исследование существования решения задачи (1) сводится к изучению сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\,\varphi_k|, \qquad \varphi_k = \big(\varphi, G_k\big)_{L_2},\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Рассмотрим систему функций $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в которой

$$P_0(x) = \frac{dG_0}{dx}, \quad P_{2k-1}(x) = \frac{1}{8\pi k}\frac{dG_{2k}}{dx}, \quad P_{2k}(x) = \frac{1}{8\pi k}\frac{dG_{2k-1}}{dx}.$$

Известно (см. [1]), что функции

$$V_0(x) = x, \quad V_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx),\ V_{2k}(x) = \sin(2\pi kx), \quad k = 1, 2, \ldots$$

являются собственными и присоединёнными функциями оператора A при $\alpha = 0$. Их совокупность образует базис Рисса в пространстве $L_2[0, 1]$. Справедлива

Теорема 2. *Система $\{P_n(x),\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ является базисом Рисса пространства $L_2[0, 1]$, квадратично близким к базису $\{V_n(1 - x),\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$.*

Свойство базисности системы $\{P_n(x),\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ позволяет уточнить условия существования решения задачи (1).

Координаты φ_n, $n = 0, 1, 2\ldots$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} |\,\varphi_{2k-1}| &\leqslant \frac{C_1}{\pi k^2}|\,\varphi(1)| + \frac{2}{\pi k}|\psi_{2k}|, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ |\,\varphi_{2k}| &\leqslant \frac{C_1}{\pi k^2}|\,\varphi(1)| + \frac{2}{\pi k}\Big(|\,\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|\Big), \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

где $\psi_n = \int_0^1 \varphi'(x) P_n(x) dx$, $n = 1, 2, \ldots$ — координаты функции $\varphi'(x) \in L_2[0, 1]$ в базисе, взаимном к $\{P_n(x),\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Заметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 < \infty.$$

Из неравенств (4) следует, что сумма

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} |\,\varphi_k| \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}|\psi_k|\right),$$

где $C_2 > 0$ – вещественная константа, не зависящая от номера N. Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, приходим к сходимости ряда (3), что и требовалось.

Тем самым, доказана

Теорема 3. *Для существования регулярного решения задачи (1) достаточно, чтобы* $\varphi(x) \in W_2^1[0,1]$, $\varphi(0) = 0$.