

**Новые решения и их
устойчивость неавтономных
систем нелинейных
дифференциальных уравнений
с малым параметром перед
производными и
релаксационные колебания**

Найдены новые периодические
решения неавтономных систем
нелинейных дифференциальных
уравнений с малым параметром
перед производными при внешнем
импульсном воздействии.

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}_1(t)),$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}_2(t))$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ - быстрые переменные,

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l)$ - медленные переменные,

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k) \quad \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_l) \quad k + l = n$$

$f_i = (i = 1, \dots, k) \quad g_i = (i = 1, \dots, l)$ -нелинейные функции

$$\beta_1(t) = (\beta_1, \dots, \beta_k), \quad \beta_2(t) = (\beta_{k+1}, \dots, \beta_n)$$

- периодическое синхронизирующее
внешнее воздействие импульсной функцией

$$\beta(t) = U_0 \quad t \in [t_1, t_2]; \quad \beta(t) = 0$$

$$t \in [0, t_1) \vee t \in (t_2, T_0].$$

Полагаем, что соответствующее автономное уравнение имеет периодические решения, являющиеся релаксационными колебаниями.

Уравнение может иметь периодические решения с периодом кратным периоду функций $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ с соотношением m/n , которые в теории нелинейных колебаний называют типами синхронизации m/n .

Мощность множества
видов синхронизации
релаксационных систем
можно оценить по диаграмме
Кантора

Установлено, что каждый из типов синхронизации m/n может иметь множество других решений-видов синхронизации. Некоторые виды, относящиеся синхронизации типа $1/1$, иллюстрируются таблицей.

В таблице символы \nearrow и \searrow означают ускорение или замедление медленной М или быстрой В фазы решения (1). Новые виды синхронизации типа m/n образуют счетное множество.

Виды решений, относящиеся к синхронизации типа 1/1

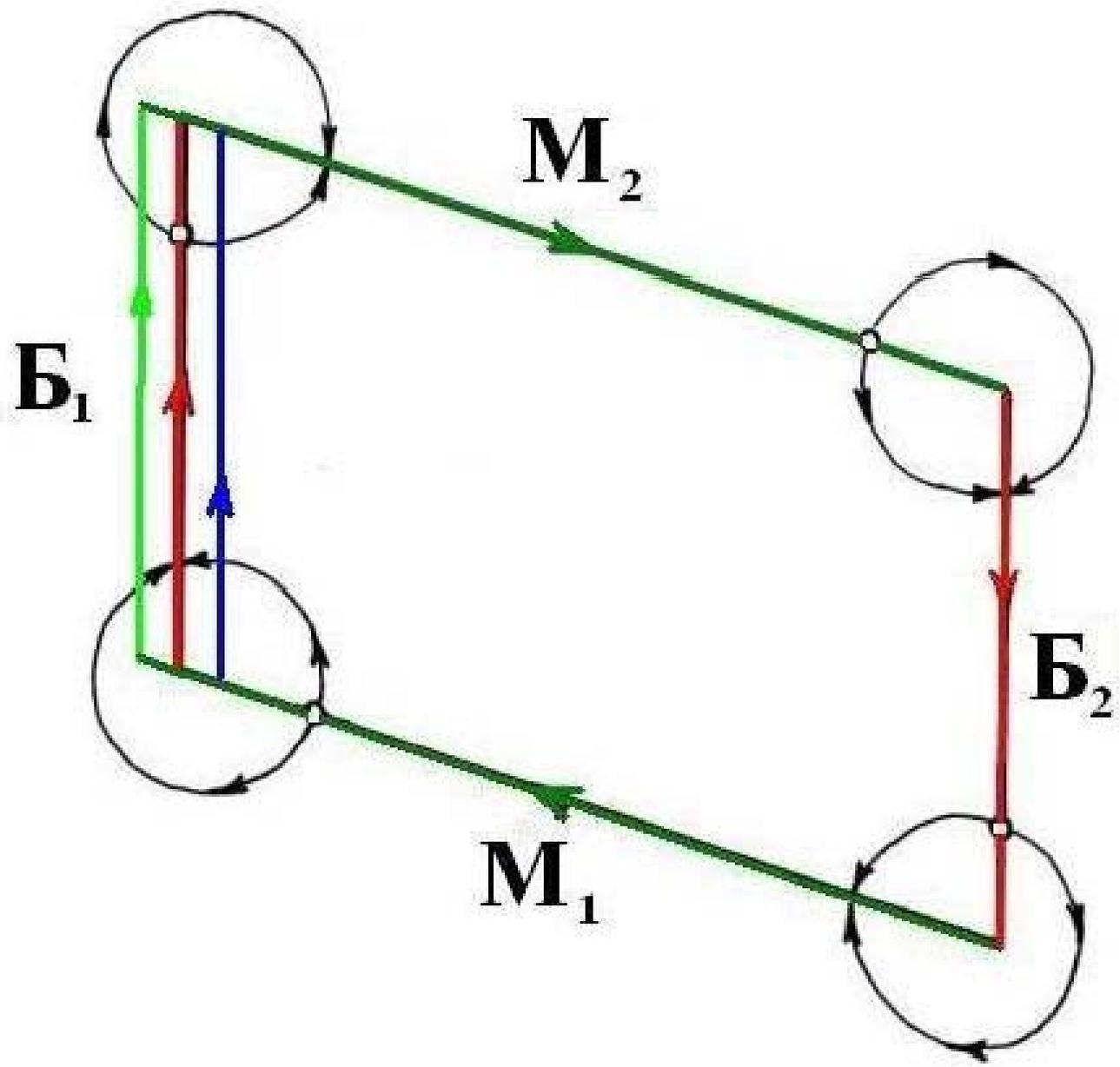
Некоторые виды синхронизации типа 1/1

№	Стартовые фазы	Ускоренное внеочередное возбуждение	№	Стартовые фазы	Замедленное внеочередное возбуждение
1.	М1	М1 ↗ Б1	5.	М1	М1 ↘ Б1
2.	М2	М2 ↗ Б2	6.	М2	М2 ↘ Б2
3.	Б1	Б1 ↗ М2	7.	Б1	Б1 ↘ М2
4.	Б2	Б2 ↗ М1	8.	Б2	Б2 ↘ М1

Комбинированные виды синхронизации типа 1/1

№№	Комбинированные виды синхронизации типа 1/1
1.	$M1 \nearrow B1 \vee M2 \nearrow B2$
2.	$M1 \nearrow B1 \vee M2 \searrow B2$
3.	$M1 \searrow B1 \vee M2 \nearrow B2$
4.	$M1 \searrow B1 \vee M2 \searrow B2$
5.	$M1 \nearrow B1 \vee B2 \nearrow M1$
6.	$M2 \nearrow B2 \vee B2 \searrow M1$
7.	$M1 \searrow B1 \vee B2 \nearrow M1$
8.	$M1 \searrow B2 \vee B2 \searrow M1$

**Иллюстрация появления видов
синхронизации из типа
синхронизации**



**УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ
НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С
МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПЕРЕД
ПРОИЗВОДНЫМИ**

Для устойчивости периодических решений автономной системы при $\beta_1(t), \beta_2(t) \equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы для уравнений в приращениях мультипликаторы μ_i ($i = 1, \dots, n$), являющиеся собственными числами матрицы монодромии, удовлетворяли условию $\mu_i < 1$

Для исследования устойчивости периодических решений используется пороговая функция $U = p(t)$ и метод функций последования Пуанкаре. Орбитальная устойчивость периодических решений имеет место, если в сечении Пуанкаре $t = kT_c$ ($k = 1, 2, \dots$) последовательность значений функции последования Пуанкаре является сходящейся.

Определение. Пусть $p(t)$ $t \in [0, T_0]$ непрерывная монотонная функция. Пусть внешнее периодическое воздействие - импульсная функция $\beta(t) = U_0$ $t \in [t_1, t_2]$; $\beta(t) = 0$, $t \in [0, t_1) \vee t \in (t_2, T_0]$. Если возбуждение внеочередного релаксационного колебания происходит при условии $\beta(t) \geq p(t)$ и не происходит при $\beta(t) < p(t)$, то функция $p(t)$ $t \in [0, T_0]$ называется пороговой.

$$y = Ly + A\varphi;$$

$$A \geq U_0 / (I - L)^{-1} \varphi$$

U_0 – величина порога

A – амплитуда импульсного
воздействия $\varphi(t)$

Уравнения Нобла

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n (1 - n) - \beta_n n = - \frac{n - n_0(E_M)}{\tau_n(E_M)}$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m (1 - m) - \beta_m m = - \frac{m - m_0(E_M)}{\tau_m(E_M)}$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h (1 - h) - \beta_h h = - \frac{h - h_0(E_M)}{\tau_h(E_M)}$$

Уравнения Нобла

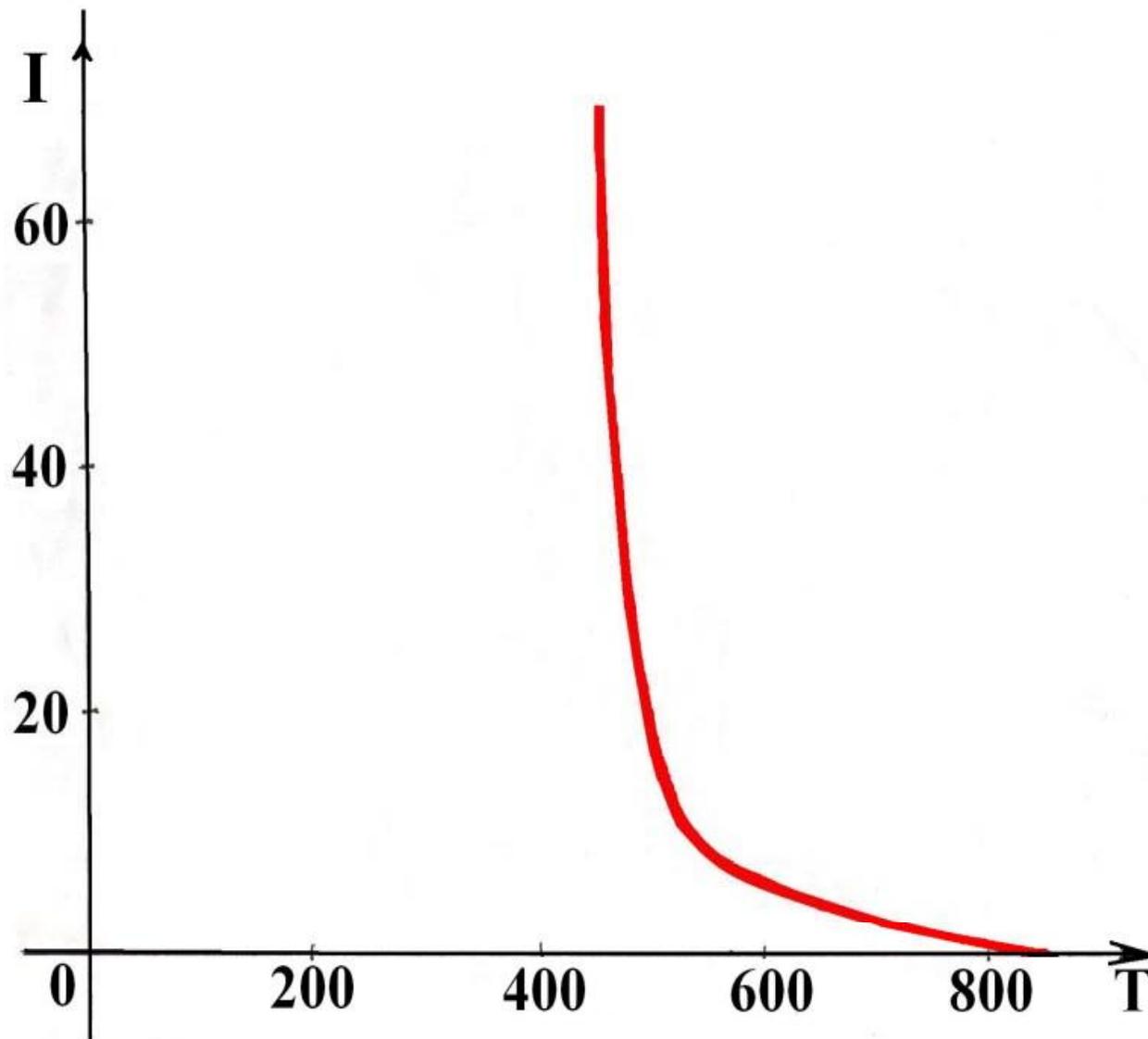
$$c \frac{dE_M}{dt} = g_{Na} (E_{Na} - E_M) + (g_{K^1} + g_{K^2}) (E_K - E_M) + g_0 (E_0 - E_M)$$

$$g_{K^1} = 1,2 \exp(-1,02E_M - 1,8) + 0,015 \exp(0,016E_M + 1,5)$$

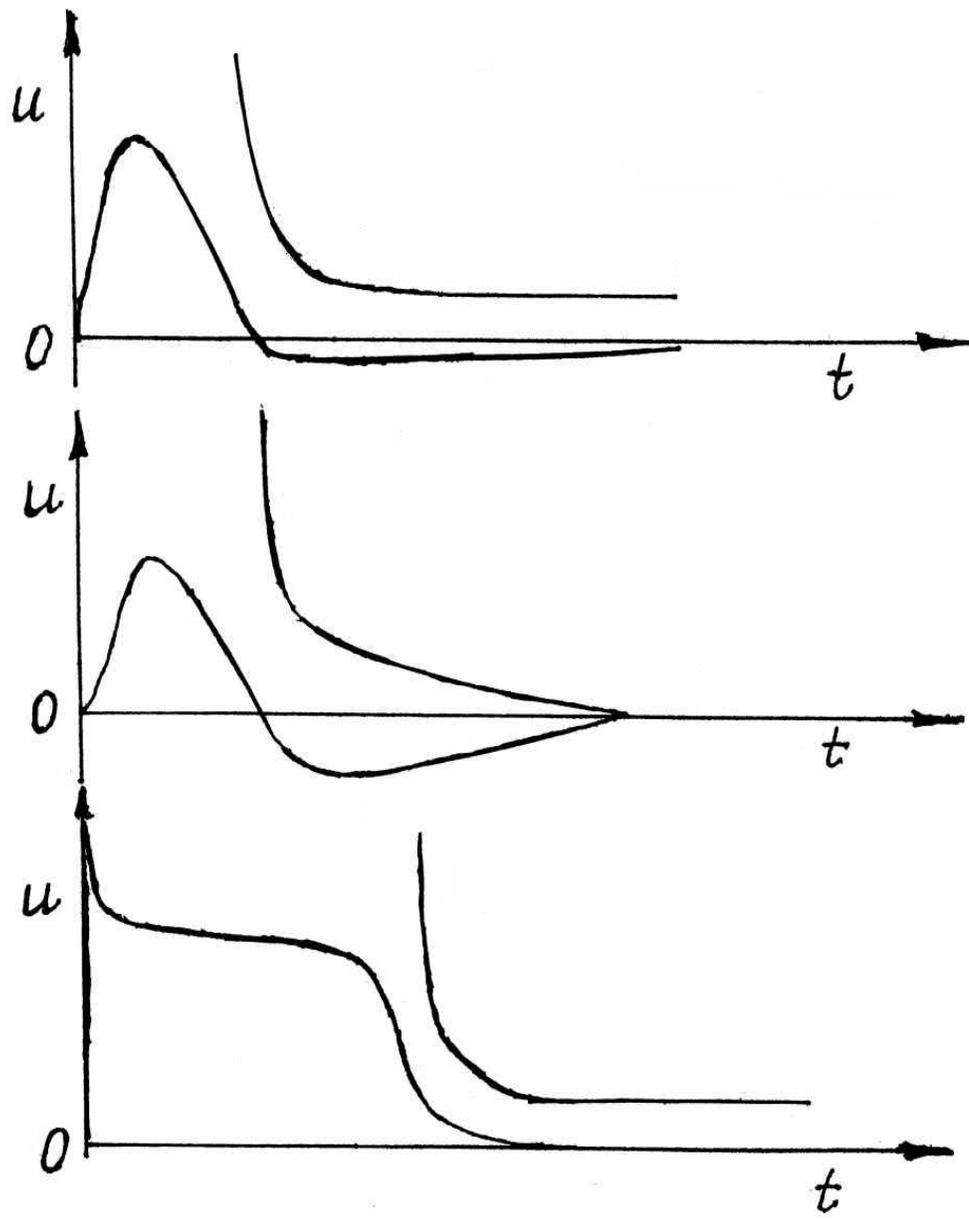
$$g_{K^2} = g_{0K} n^4$$

$$g_{Na} = g_{0Na^1} m^3 h + g_{0Na^2}$$

Пороговая чувствительность для уравнений Нобла



Пороговая чувствительность для уравнений Ходжкина-Хаксли, для синоатриального узла и для волокна Пуркинье



Теорема (об устойчивости периодических решений при синхронизации).

Пусть автономная система при $\beta_1(t), \beta_2(t) \equiv 0$ имеет устойчивое периодическое решение $\mathbf{u}(t)$,
 $\mathbf{u}(t + T_0) = \mathbf{u}(t)$.

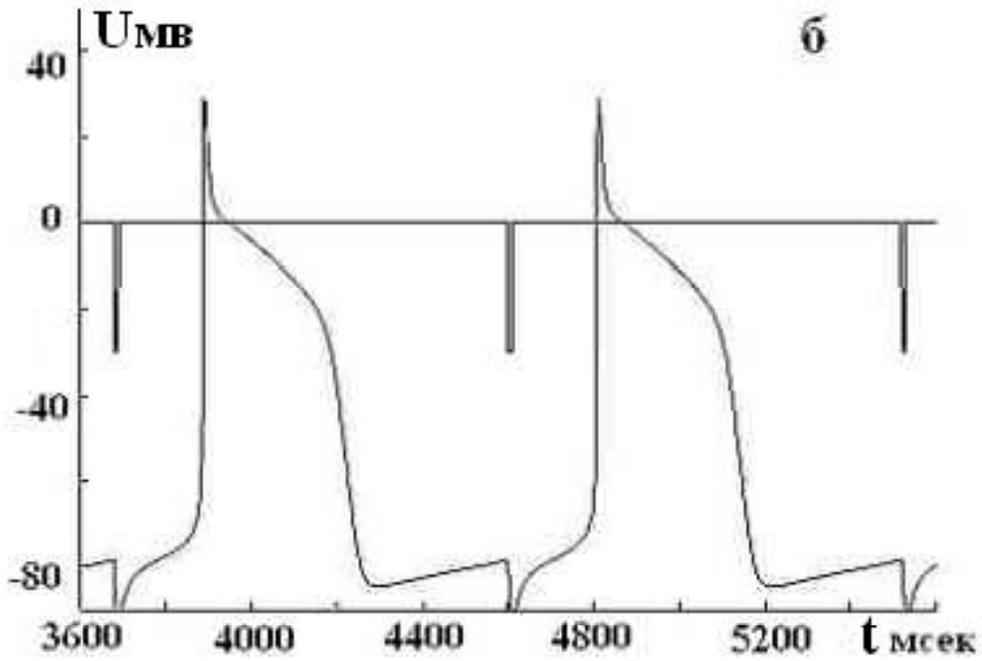
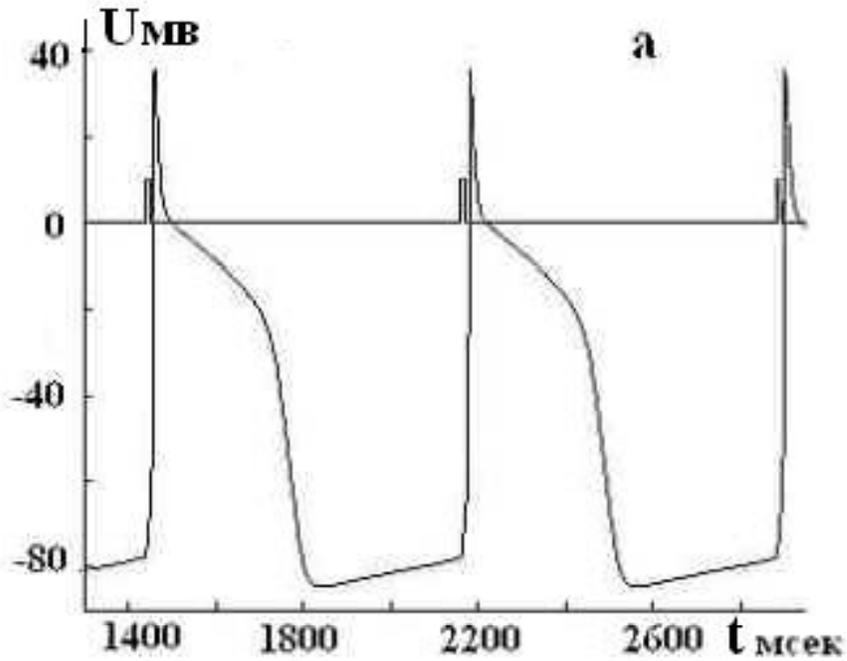
Пусть для любых $\beta(t - \tau)$ $\tau \in [0, T_0]$, $|U_0| < M$ существует единственное ограниченное непериодическое решение уравнения $\mathbf{v}(t)$ $t \in [0, T_0]$. Тогда периодические решения с периодом $T = (m/n)T_c$ устойчивы при условии $|mT_c - nT_0| < \varepsilon$, $\varepsilon = p^{-1}(U_0)$.

Новые решения, полученные в
вычислительном эксперименте

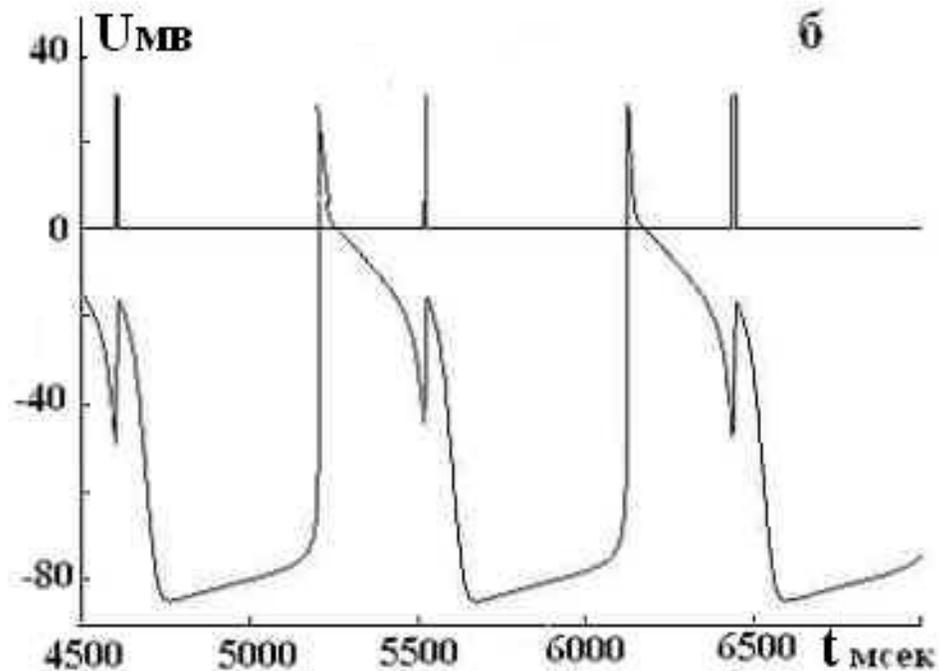
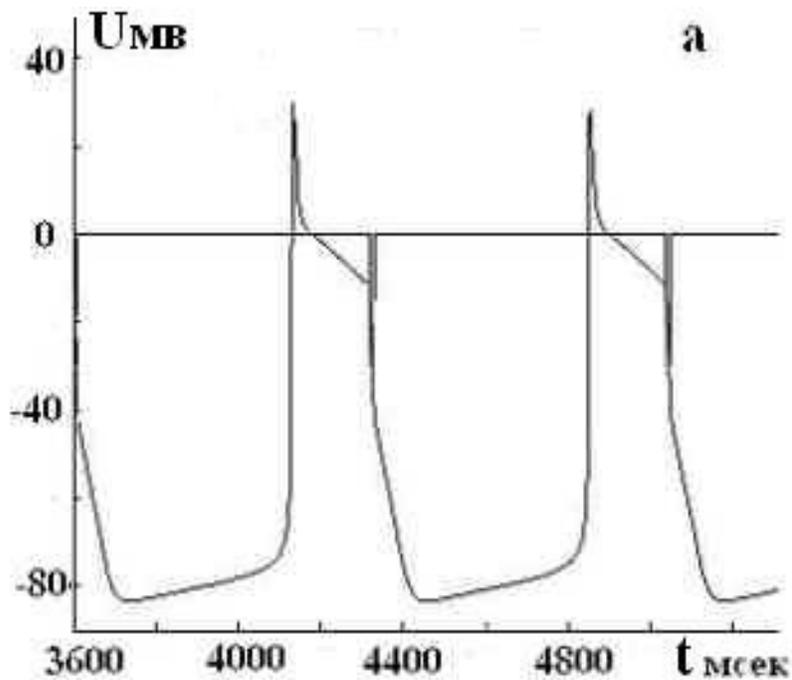
Уравнение Бонхоффера,
Ван дер Поля, Фитцхьюга-Нагумо

$$\frac{du}{dt} = \left(u - \frac{u^3}{3} - v \right) + I$$

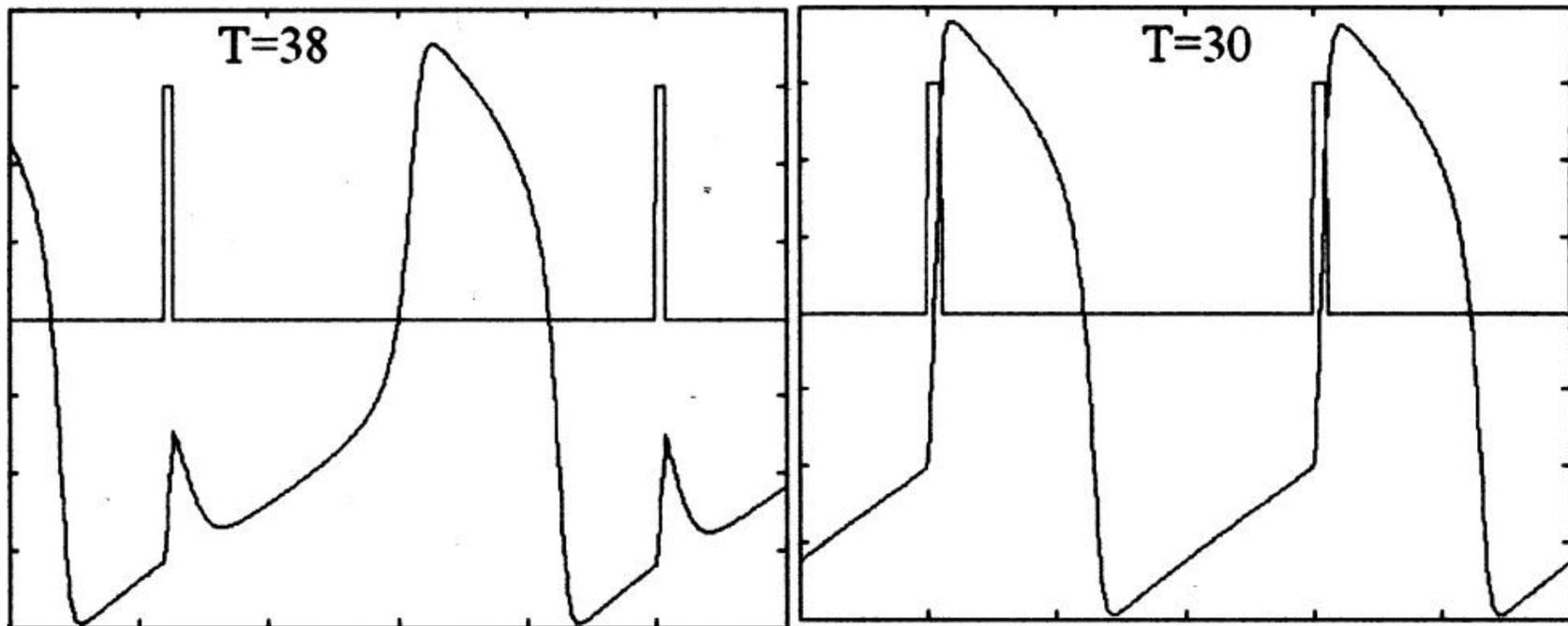
$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon(u + a - bv)$$



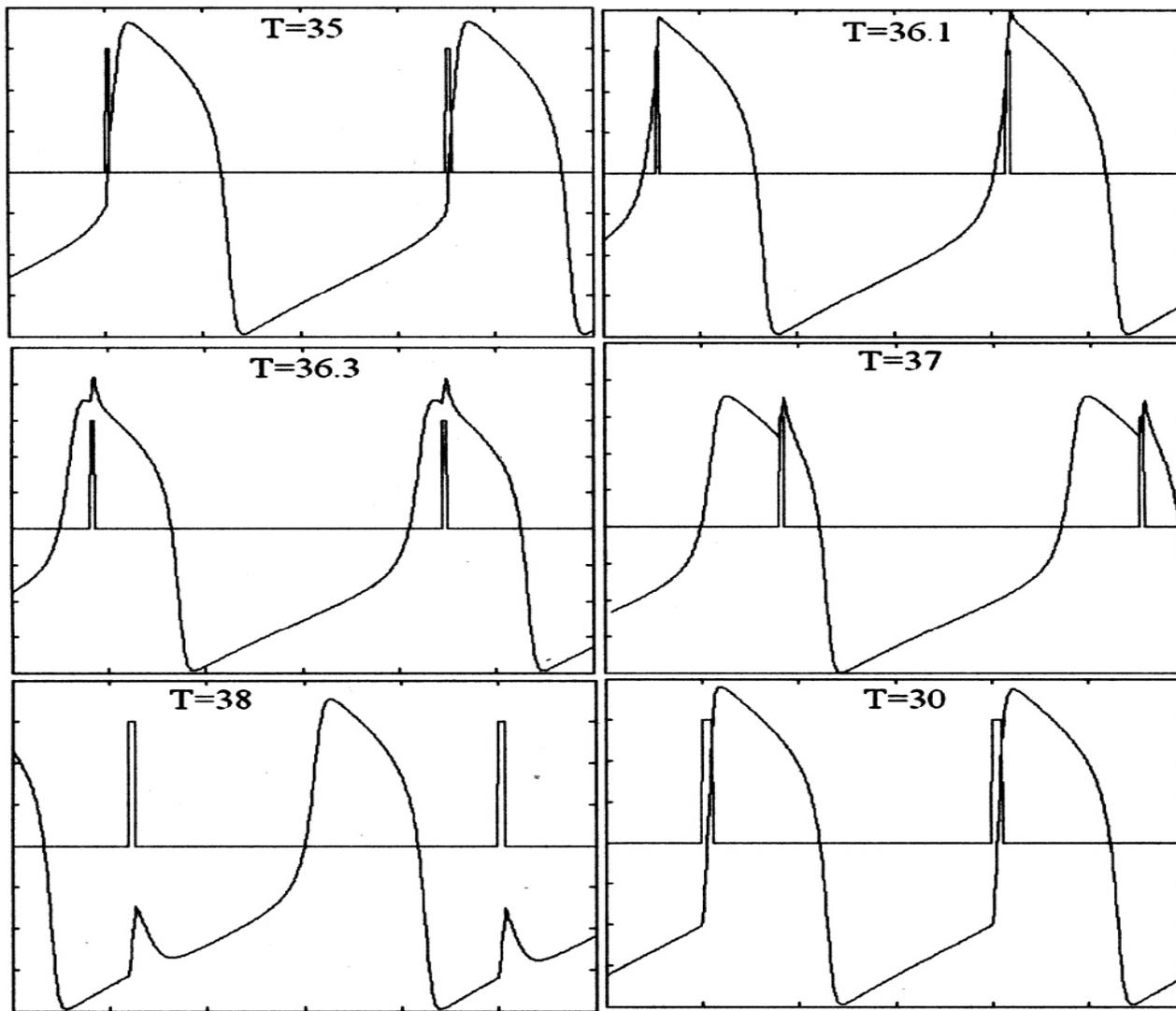
Формы колебаний для режимов синхронизации типа 1/1 по сценарию $M1 \nearrow B1$ и $M1 \searrow B1$ для релаксатора Нобла. Значение периода стимуляции и амплитуды импульса: а) 720 мсек., $10 \mu a$; б) 920 мсек., $-20 \mu a$.



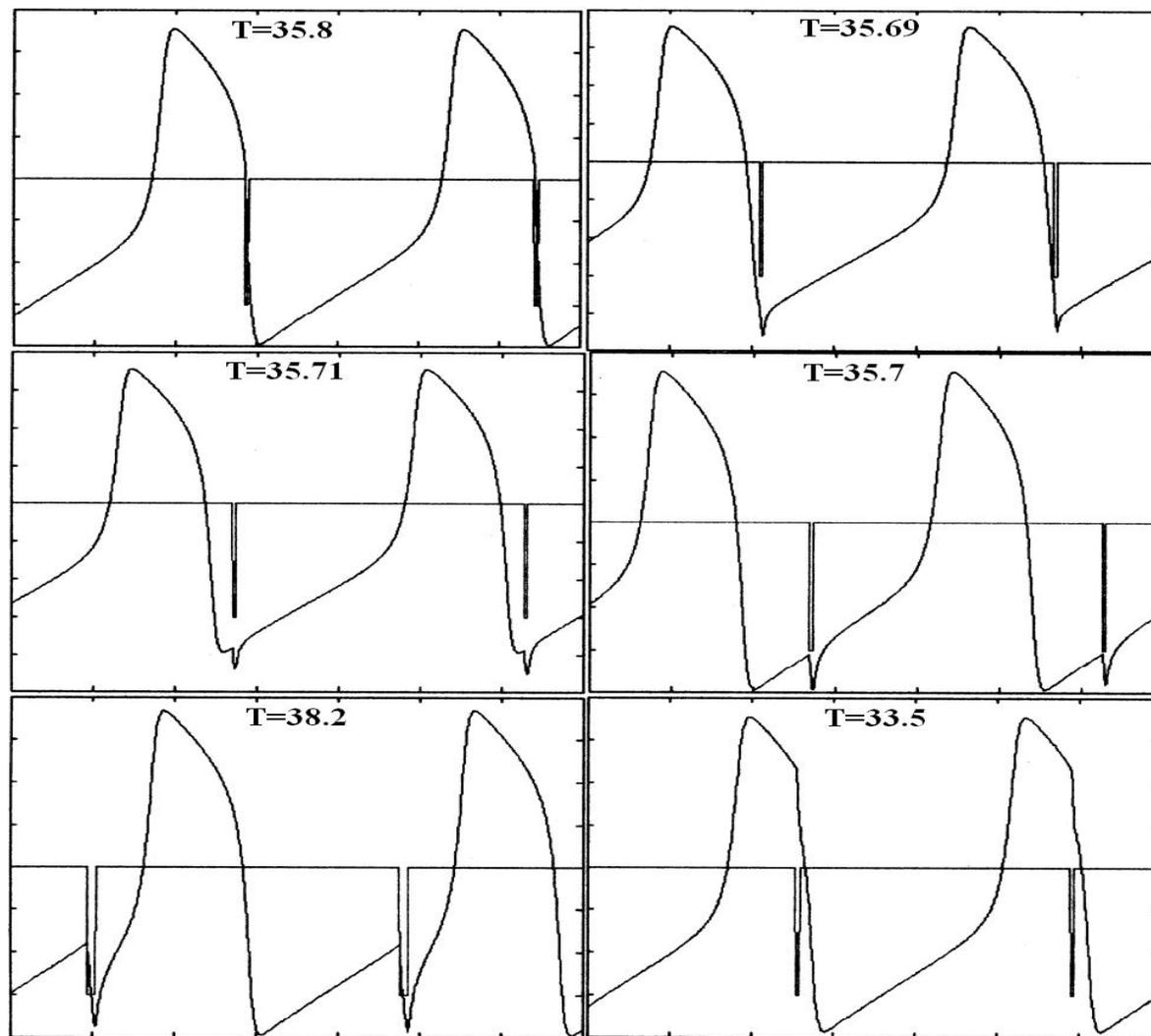
Формы колебаний для режимов синхронизации типа 1/1 по сценарию $M2 \searrow B2$ и $M2 \nearrow B2$ для релаксатора Нобла. Значение периода стимуляции и амплитуды импульса:
 а) 720 мсек., $-30 \mu\text{a}$; б) 920 мсек., $30 \mu\text{a}$.



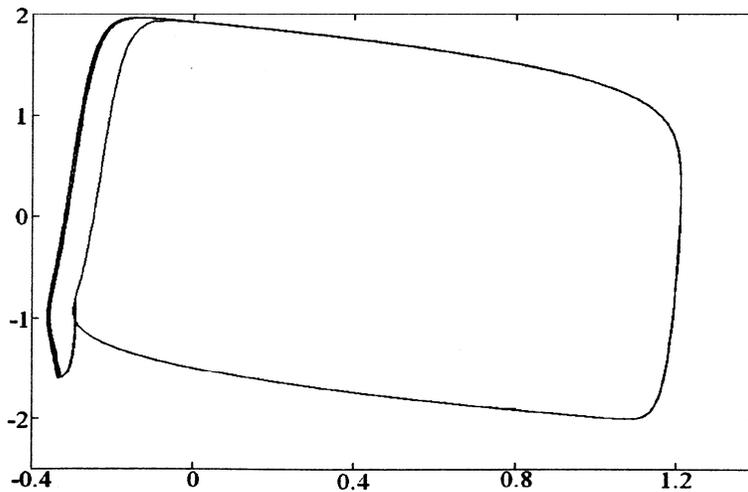
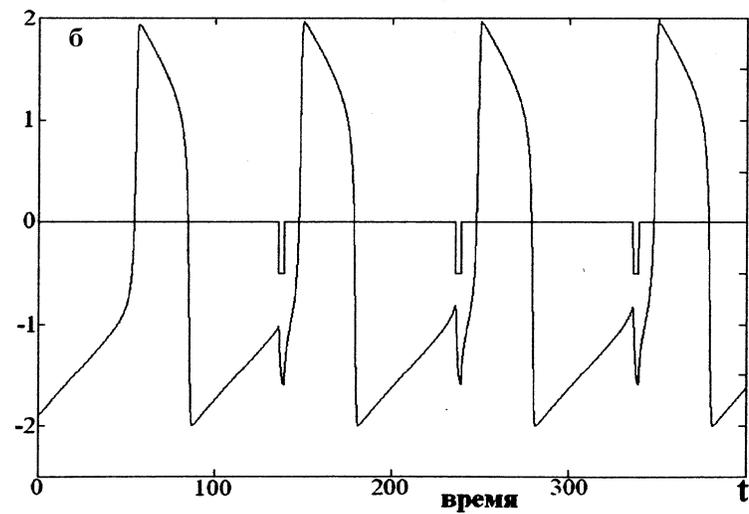
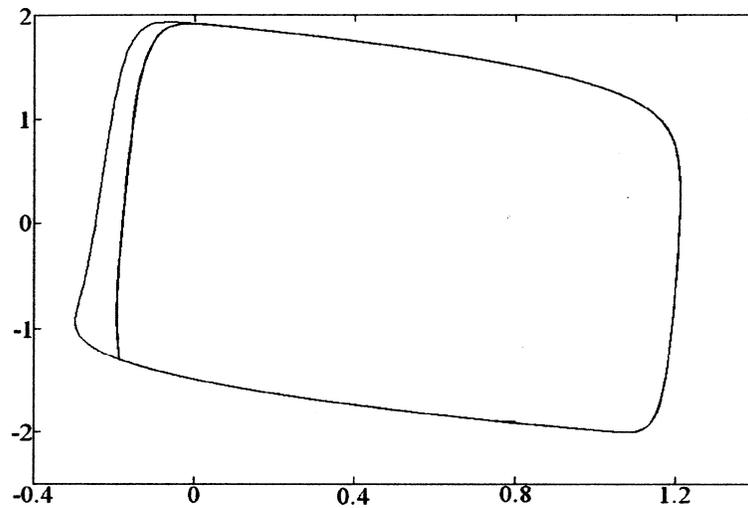
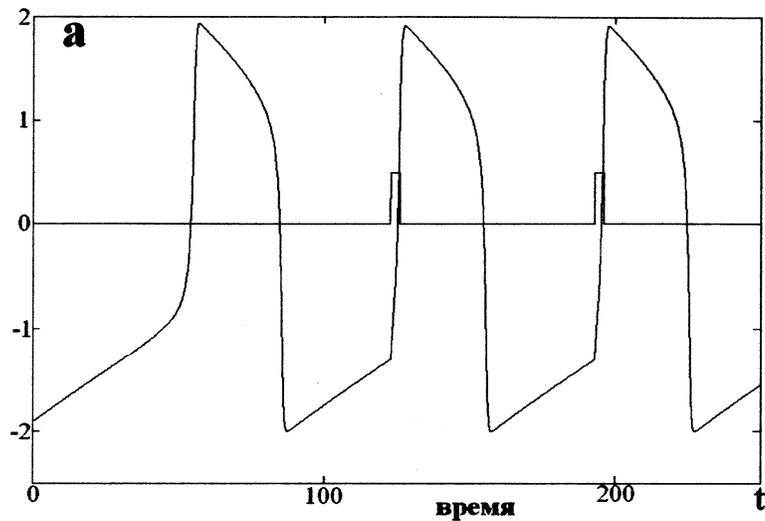
Множество видов синхронизации при соотношении частот 1/1 при синхронизации сигналами с разными периодами с разными периодами. На левом рисунке показана синхронизация вида $M1 \searrow B1$, на рисунке справа синхронизация вида $M1 \nearrow B1$, видно резкое различие фазовых соотношений.



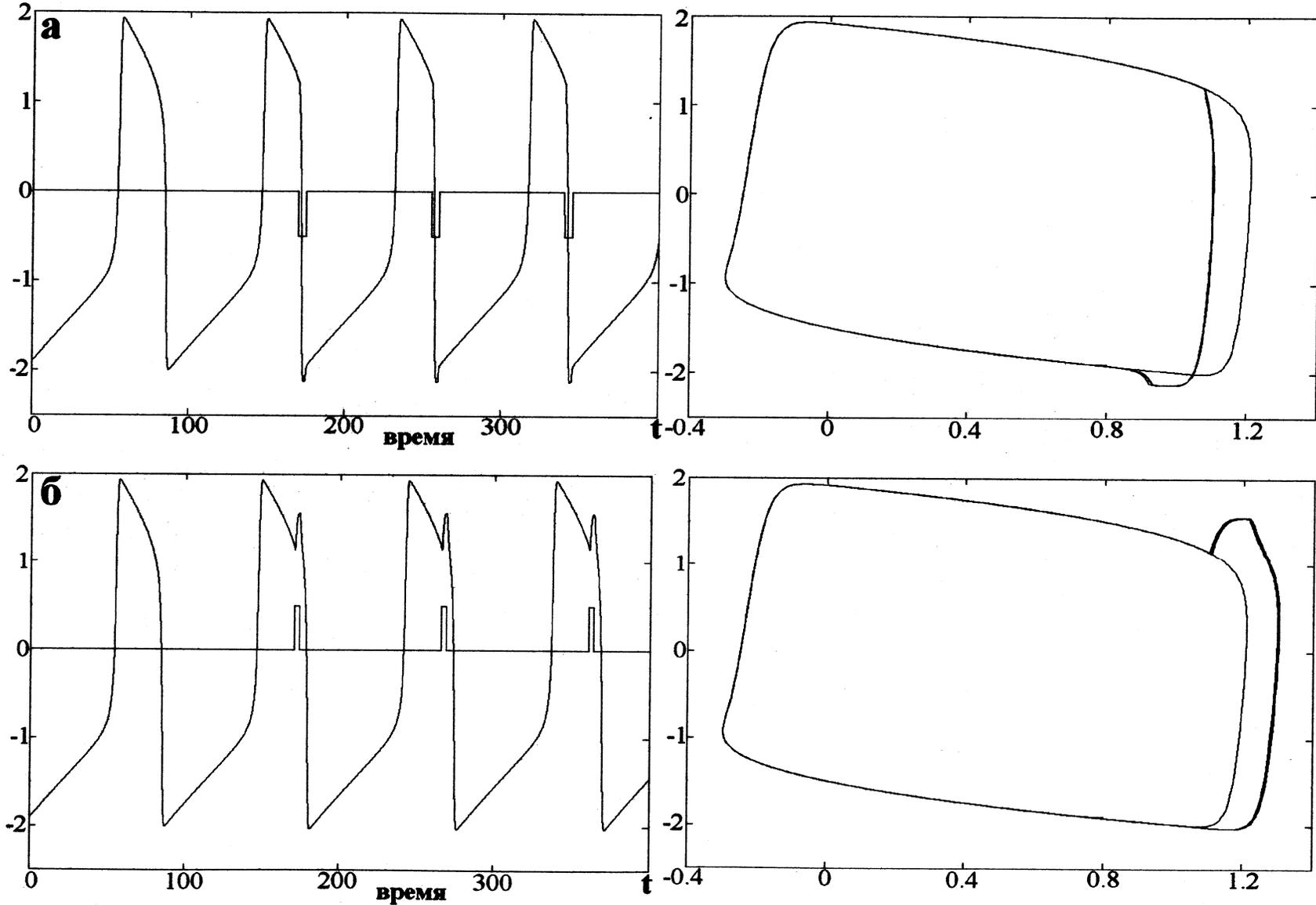
Множество видов синхронизации типа 1/1 при синхронизации импульсами положительной полярности релаксатора Ван дер Поля - Фитцхьюга. Период релаксатора $T_0 = 36.2$;



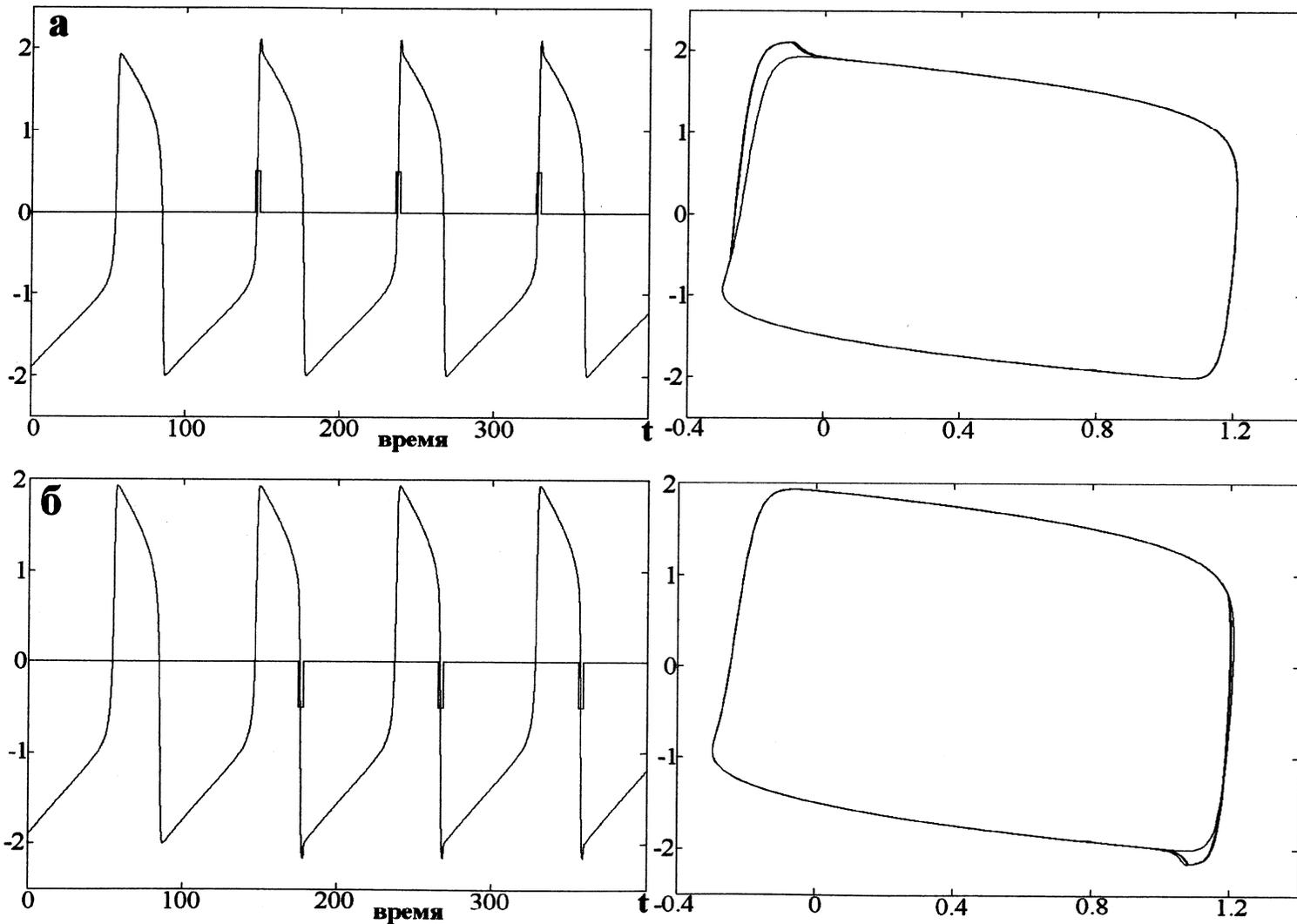
Шесть различных видов синхронизации типа 1/1 при возбуждении импульсами отрицательной полярности релаксатора Ван дер Поля - Фитцхьюга. Период релаксатора $T_0 = 36.2$.



Форма колебаний и их фазовые портреты в пространстве переменных Ox_1, x_2 релаксатора Бонхоффера - Ван дер Поля в случаях: а) ускорения медленного движения $M1$ вид синхронизации $M1 \nearrow B1$ типа $1/1$, период синхронизирующего сигнала $T_c = 70$; б) замедления медленного движения $M1$ вид синхронизации $M1 \searrow B1$ типа $1/1$, $T_c = 100$. Период релаксатора $T_0 = 92.2$

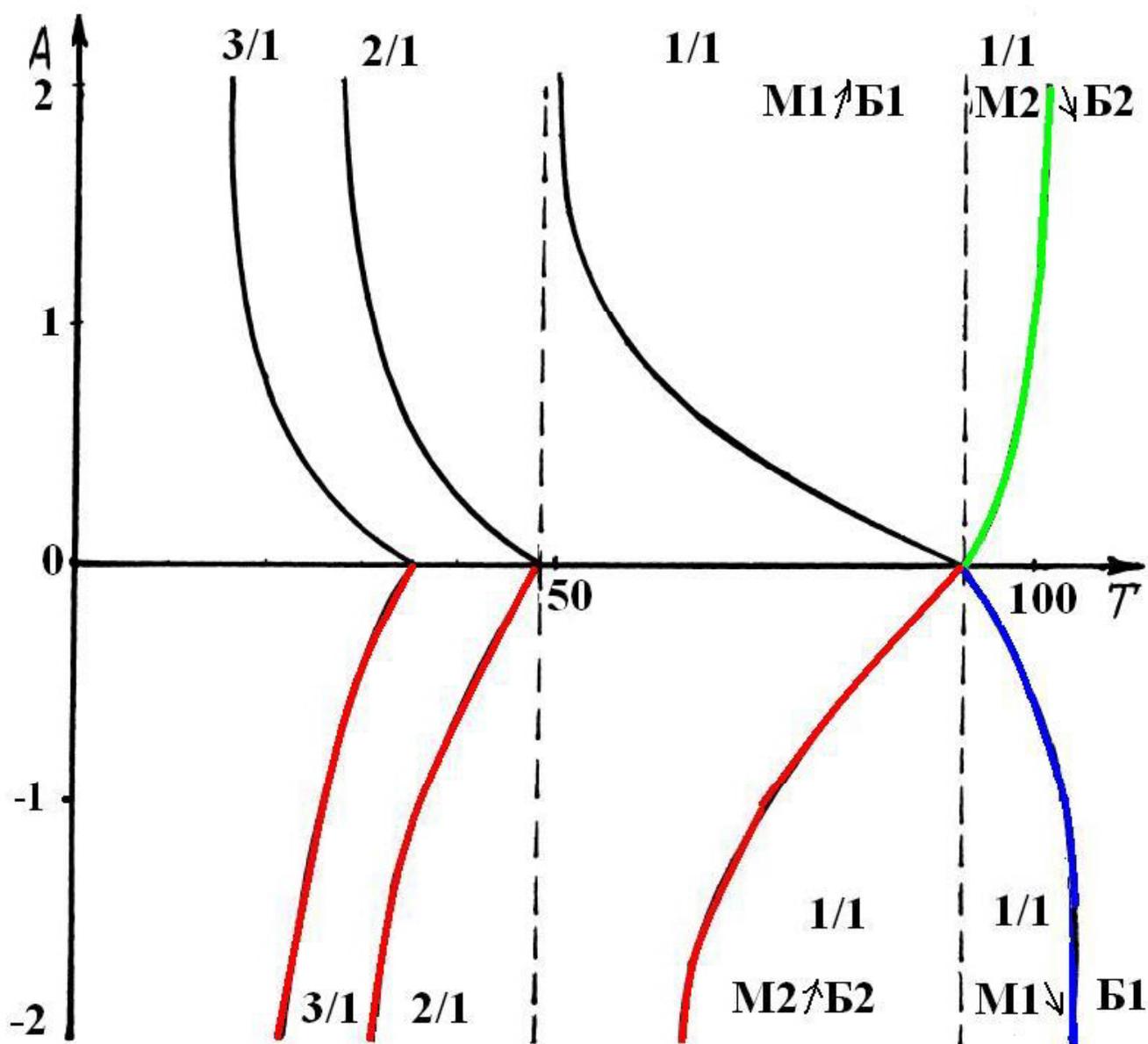


Форма колебаний и их фазовые портреты в пространстве переменных Ox_1, x_2 релаксатора Бонхоффера - Ван дер Поля в случаях: а) ускорения медленного движения $M2$ вид синхронизации $M2 \nearrow B2$ типа $1/1$, период синхронизирующего сигнала $T_c = 85$; б) замедления медленного движения $M2$ вид синхронизации $M2 \searrow B2$ типа $1/1$, $T_c = 95$. Период релаксатора $T_0 = 92.2$



Синхронизация релаксационной системы за счет ускорения быстрой фазы движения: а) синхронизация вида $B1 \nearrow M2$ за счет ускорения переднего фронта релаксатора - фазы быстрой деполяризации, период синхронизирующего сигнала $T_c = 91$; б) синхронизация вида $B2 \nearrow M1$ за счет ускорения заднего фронта - фазы быстрой реполяризации релаксатора, период синхронизирующего сигнала $T_c = 90.5$.
 Период релаксатора $T_0 = 92.2$

Амплитудно-периодные
характеристики
(бифуркационная диаграмма)
синхронизации релаксационных
систем



Амплитудно-периодные характеристики релаксатора Бонхоффера - Ван дер Поля - Фитцхьюга. Сверху слева показан режим $M1 \nearrow B1$, снизу справа- режим $M1 \searrow B1$, снизу слева- режим $M2 \nearrow B2$, сверху справа- режим $M2 \searrow B2$.

Приложение видов синхронизации
Первым замечательным приложением
ускорительного вида синхронизации
 $M1 \nearrow B1$ типа $1/1$ является его
использование для формирования единого
ритма многих тысяч автоколебательных
пейсмекерных клеток синоатриального
узла сердца человека и животных

Мазуров М.Е. Ритмогенез в синоатриальном узле сердца // Биофизика. **2006**.
Т. 51. №. 6. С. 1092-1099.

Мазуров М.Е. К проблеме формирования единого ритма в синоатриальном
узле// Биофизика. **2009**. Т. 54. №. 1. С.81-88

**Вторым замечательным приложением
замедлительного вида синхронизации
M1↙ B1 типа 1/1 является его
использование для управления
сформированным ритмом из головного мозга**

•Мазуров М.Е. Управление единым ритмом сердца// Биофизика.
2009. Т. 54. №. 1. С.89-96



Благодарю

за

внимание