ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОБРАЩЕНИЯ УСРЕДНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ.

Граев М. И., Коганов А. В.
Россия, 117218, Москва, Нахимовский п. 36, к. 1, НИИСИ РАН
При поддержке РФФИ) проект №10-01-00041а

Решается двойственная задача интегральной геометрии: по заданному оператору усреднения определить класс функций, на котором возможно обращение этого оператора. Эти классы определяются неоднозначно. Даётся полное описание таких классов в форме минимальной дополнительной информации, которую надо знать о функции. Исследуется возможность их конструктивного описания, и в случае конечной системы усреднения даются формулы обращения.

Классическая задача интегральной геометрии заключается в поиске такой системы подмножеств на пространстве с мерой, которая позволяет восстановить любую функцию, абсолютно суммируемую на этих подмножествах, по её интегралам . При этом находятся явные формулы обращения, которые восстанавливают функцию.

В данной работе исследуется ситуация, когда система подмножеств интегрирования функции не позволяет однозначно восстановить функцию по её интегралам. Двойственная задача интегральной геометрии связана с вопросом, какую дополнительную информацию надо знать о функции кроме её интегралов по заданной системе подмножеств, чтобы стало возможным её восстановление. Другими словами, *как надо сузить класс функций, чтобы интегральный оператор стал обратимым?* Оказалось, что эти классы имеют полное описание.

1. Постановка задачи.

Дано пространство действительных функций $F\{X,\mathbb{R}\}$ с доменом X. На домене задана мера w с сигма-алгеброй S. И задана система подмножеств $M \subset S$ измеримых по этой сигма-алгебре («система усреднения»). *Усредняющий оператор* $h : F\{X,\mathbb{R}\} \to F\{M,\mathbb{R}\}$, определен как

$$hf(m) = \int_{x\in m} f(x)dw(x) \tag{1}$$

Его областью определения будем считать такие функции, на которых все интегралы вида (1) сходятся абсолютно:

$$f \in \operatorname{dom} h \quad \Leftrightarrow \quad \forall m \in M \quad \int_{x\in m} \left| f(x) \right| dm(x) < \infty \tag{2}$$

Возможны две ситуации. Первая: по образу функции однозначно восстанавливается исходная функция. Вторая: образ функции не позволяет однозначно восстановить прообраз из области определения усредняющего оператора.

Определение. Подкласс функций $F' \subset \operatorname{dom} h$ называется *разрешимым* (или *резольвентным*), если для образа $hf, f \in F'$, в классе F' имеется единственный прообраз. Разрешимый класс называется *максимальным*, если добавление к нему любой функции из $F(X,\mathbb{Z}) \setminus F'$ делает его неразрешимым.

Разные максимальные разрешимые классы могут иметь непустое пересечение, но они не могут, по определению, включаться один в другой.

2. Разрешимые классы на конечной области определения функций.

Пусть X конечное множество с $n(X)$ элементами. Тогда и M конечно с $n(M)$ элементами. Функцию из $F\{X,\mathbb{R}\}$ можно рассматривать, как вектор в $\mathbb{R}^{n(X)}$. Функцию из $F\{M,\mathbb{R}\}$ можно рассматривать, как вектор в $\mathbb{R}^{n(M)}$. Усредняющий оператор переводит вектор первого пространства в вектор второго пространства и действует как линейный оператор с матрицей A. Элементы этой матрицы могут быть индексированы точками из прямого произведения $X \times M$, причем

$$A_{m,x} = dw(x)\,(x \in m)\,|\,0\,(x \notin m);.$$

$$hf(m) = \sum_{x \in X} A_{m,x} f(x) = \left(Af\right)_m \tag{3}$$

Если матрица A не выроджена, то оператор обратим. Для вырожденной матрицы надо искать резольвентные классы. В этом случае существует подпространство $K(M)$ — ядро оператора h.

$$f \in K(M) \Leftrightarrow_{def} \quad hf = Af = 0 \in \mathbb{R}^{n(M)}$$

Определение. Выберем в $F(X,\mathbb{R})$ базис $\varphi_1,\cdots,\varphi_l,\psi_1,\ldots\psi_k$, $l+k=n(X)$, такой, что базисные векторы $\psi_1,\ldots\psi_k$ образуют базис в $K(M)=\langle\psi_1,\ldots\psi_k\rangle$ (*базис ядра*). Часть базиса $\varphi_1,\cdots,\varphi_l$ назовем *базисом дополнения*. Обозначим $L(M)=\langle\varphi_1,\cdots,\varphi_l\rangle$ линейную оболочку базиса дополнения. Векторы $\psi_1,\ldots\psi_k$ обнуляются действием h, а из $\varphi_1,\cdots,\varphi_l$ ни один не обнуляется и не обнуляются любые ненулевые их линейные комбинации.

$$F(X,\mathbb{R}) = L(M) \oplus K(M) = L(M) \times K(M).$$

Такой базис назовем *согласованным* с усредняющим оператором.

Ядро $K(M)$ не зависит от выбора базиса, но дополнение к ядру $L(M)$ зависит от выбора базиса дополнения. $L(M) = L(M,\varphi)$. Для каждого вектора $q \in F(X,\mathbb{R})$ однозначно определено разложение, которое зависит от выбора базиса дополнения,

$$q = f + g, \quad f \in L(M), g \in K(M). \tag{4}$$

$$hq = hf \tag{5}$$

$$f = h^+ hq \tag{6}$$

Введем подкласс функций, *связанным отображением* ξ, $L(M;\xi)$, который определяется отображением $\xi : L(M) \to K(M)$ по формуле

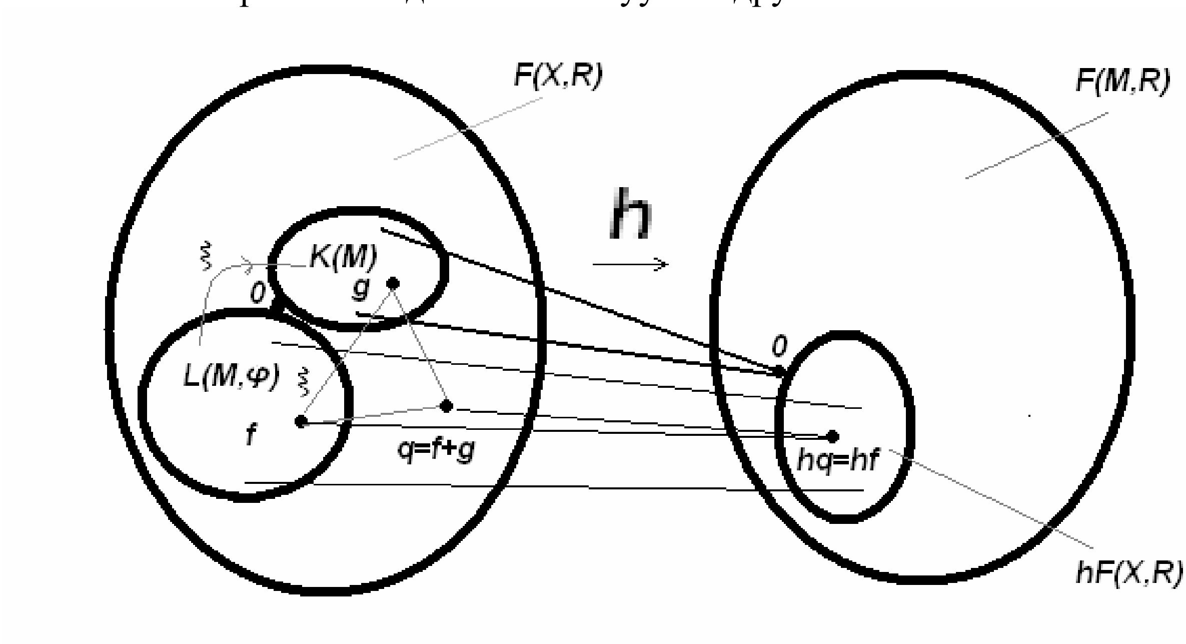
$$L(M,\xi) = \left\{ q = f + \xi(f) \middle| f \in L(M) \right\}. \tag{7}$$

На нём задача обращения оператора усреднения решается однозначно:

$$q = h^{+}hq + \xi(h^{+}hq) \qquad (8)$$

Теорема 1. *Подкласс, связанный произвольным отображением, является максимальным резольвентным. Разным отображениям соответствуют различные связанные с ними подклассы. Других максимальных резольвентных подклассов нет.*

Интересно, что мощность множества таких классов не только бесконечна, но и превосходит континуум, поскольку равна мощности множества всех отображений одного континуума в другой.



3. Переход к бесконечной области определения.

Непосредственный переход к счетным и более носителям с атомарной мерой сталкивается с трудностью. Система (6) становится бесконечной и однозначность её разрешения надо специально доказывать. Однако разложение пространства функций по двум базисам сохраняет силу. Числа $n(X)$, $n(M)$, l и k становятся трансфинитными. В счетном случае можно считать их равными ∞ в обычном смысле.

Теорема 2. *Теорема 1 верна для любого носителя X с атомарной мерой, возможно с потерей конструктивности при частичном обращении оператора усреднения.*

4. Общий случай неатомарной меры.

Ядро $K(M)$ этого отображения определено условием

$$g \in K(M) \Leftrightarrow \forall m \in M \quad hg(m) = \int\limits_{x \in M} g(x)dw(x) = 0 \qquad (9)$$

Выберем в $F\{X,\mathbb{R}\}$ базис $B(M)$ состоящий из двух частей.

$$B(M) = \{\varphi_i(x) \mid i \in I\} \cup_{\varnothing} \{\psi_j(x) \mid j \in J\}$$

$$K(M) = \langle \psi_j \mid j \in J \rangle,\ L(M) =_{def} \langle \varphi_i \mid i \in I \rangle.$$

Мощности частичных базисов $\#I$ и $\#J$ не ограничены, но *для каждой функции из класса* $F\{X,\mathbb{R}\}$ *имеется не более чем счетное число базисных векторов с ненулевыми коэффициентами разложения*. Это следует из того, что сверхсчетные суммы ненулевых членов всегда не сходятся абсолютно. Поэтому соответствующие им функции не входят в пространство $F\{X,\mathbb{R}\}$.

Теорема 3. Все максимальные резольвентные классы образуют семейство $L(M;\xi)$.

Замечание 4. Предметом интегральной геометрии является построение явных формул или алгоритмов обращения. В классе отображений $\xi : L(M) \to K(M)$ в основном содержатся *неконструктивные отображения*. И для них явное обращение усредняющего оператора заведомо невозможно. Но и для конструктивных отображений ξ *не всегда есть явное обращение* образов из $hL(M)$ в прообразы из $L(M)$.

5. Конечные системы усреднения с конечными мерами.

Случай $\#M = 1$. $M = \{m\}, m \subset X$. Тогда базис дополнения состоит из любой одной функции $\varphi_m(.)$ для которой

$$h\varphi_m(m) = \int_{x\in m} \varphi_m(x)dw(x) \neq 0 \qquad (5.1)$$

Теорема 5.1. Для произвольной системы $\langle X, M, S, w\rangle$ и для произвольных двух базисов дополнения $\varphi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$ и $\varphi' = \{\varphi'_i \mid i \in I\}$ совпадает совокупность всех максимальных резольвентных классов $L(M,\varphi,\xi)$ и $L(M,\varphi',\xi')$.

Определение. Сопоставим каждой точке $x \in X$ набор тех подмножеств усреднения, которые содержат эту точку $p(x) = \{m \mid m \in M, x \in m\} \subset M$. Назовём *разбиением системы усреднения* $D(M)$ разбиение пространства X на подмножества точек с одинаковым значением $p(x)$.

Точки, для которых $p(x) = \varnothing$, не входят ни в одно множество усреднения. Эти точки образуют один элемент разбиения, который назовём *внешним* и обозначим d_0. $d_0 = X \setminus \cup M$. Далее обозначим $\#M = n$, $\#D = k+1$, $D = \{d_0; d_1; \ldots; d_k\}$, $M = \{m_1; \ldots; m_n\}$. В общем случае $k \geq n$. При этом, $k = n$ если и только если подмножества из системы M попарно не пересекаются.

Введём три матрицы, связанные с конечной системой усреднения M. Размерности всех этих матриц $n \times k$ (длина строки k). Элемент d_0 не учитывается. Индексы $i = 1,\ldots,n$ и $j = 1,\cdots,k$.

Матрица инцидентности системы усреднения

$$\mu = (\mu_{i,j}), \quad \mu_{i,j} = 1(d_j \subset m_i) \mid 0. \qquad (5.6)$$

Матрица весов

$$\eta = (\eta_{i,j}), \quad \eta_{i,j} = w(d_j)\mu_{i,j}; \qquad (5.7)$$

Матрица операторов усреднения

$$\theta = \left(\theta_{i,j}\right), \quad \theta_{i,j}(.) = \mu_{i,j} \int\limits_{x \in d_j} (.) dw(x); \tag{5.8}$$

Преобразование функции в функциональный вектор-столбец:

$$\delta f = \left(\delta_1 f, \dots, \delta_k f\right), \quad \delta_j f(x) = \chi_{d_j}(x) f(x). \tag{5.9}$$

$$hf = \theta \delta f, \tag{5.10}$$

где $\left(hf\right)_i = hf(m_i)$, $hf(m_i) = \left(\theta \delta f\right)_i$ (5.10a)

Лемма 5.1. Набор нулевых и ненулевых миноров в этих трех матрицах совпадает.

Построение базиса дополнения в разложении $F(X, \mathbb{R}) = L(M) \oplus K(M)$.

$$\varphi_i = \chi_{m_i}(.), \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.11}$$

Этот набор векторов назовём исходным. По нему строим матрицу u.

$$u_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j) = w(m_i \cap m_j) \tag{5.12}$$

В этой матрице выбираем максимальный невырожденный минор. Номера его строк задают векторы исходного набора, которые войдут в базис дополнения. Этот базис дополнения назовём *стандартным*. В него войдут $r = rnk(u)$ векторов. Матрица u для этого базиса невырождена.

Теперь можно построить явную формулу обращения для класса функций $L(M, \xi)$ со стандартным базисом дополнения. Пусть дана функция $f \in F(X, \mathbb{R})$, $f = g + q$, $g \in L(M)$, $q \in K(M)$. Тогда $g = \sum\limits_{i=1,\dots,r} a_i \varphi_i$. Верны равенства $hf(m) = hg(m)$ и $q = \xi g$.

Из линейности оператора $hf(m_j) = \sum\limits_{i=1,\dots,r} a_i h\varphi_i(m_j) = \sum\limits_{i=1,\dots,r} a_i u_{i,j}$, или $hf = ua$.

$$a = u^{-1}(hf) \tag{5.13}$$

Формула обращения:

$$g(x) = \sum_{i=1,\dots,r} \left(u^{-1} hf\right)_i \varphi_i(x) = \left(u^{-1} hf, \varphi(x)\right); \tag{5.14a}$$

$$f(x) = g(x) + \xi(g(.))|_x \tag{5.14b}$$

Теорема 5.2. Для конечной системы усреднения существует стандартный базис дополнения, состоящий из характеристических функций того подмножества системы, которое образует максимальный ненулевой минор матрицы скалярных произведений (5.12); в этом базисе можно построить формулу обращения (5.13)(5.14) в произвольном разрешимом классе функций.

Пример 5.1. Система попарно непересекающихся множеств усреднения. В этом случае аппарат значительно упрощается.

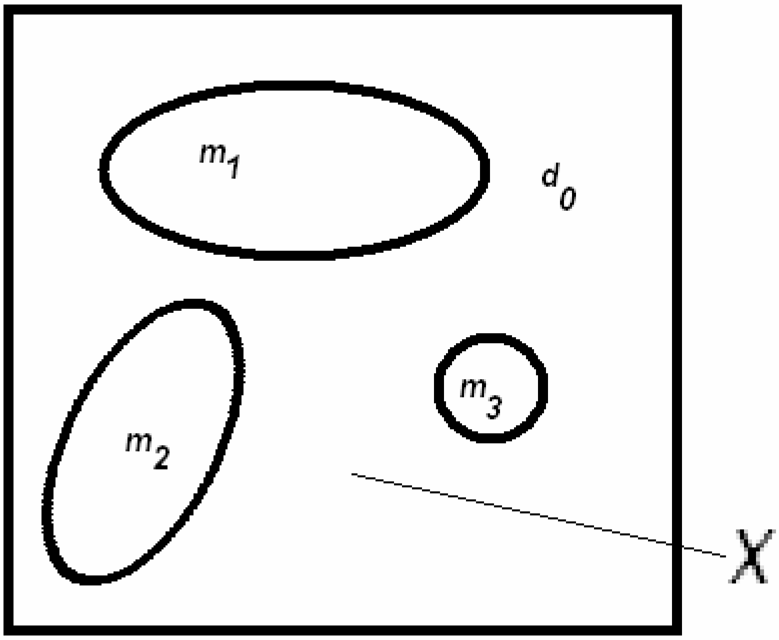
$$M = \{m_1, \dots, m_n\}, \quad m_i \cap m_j = \varnothing, i \neq j.$$

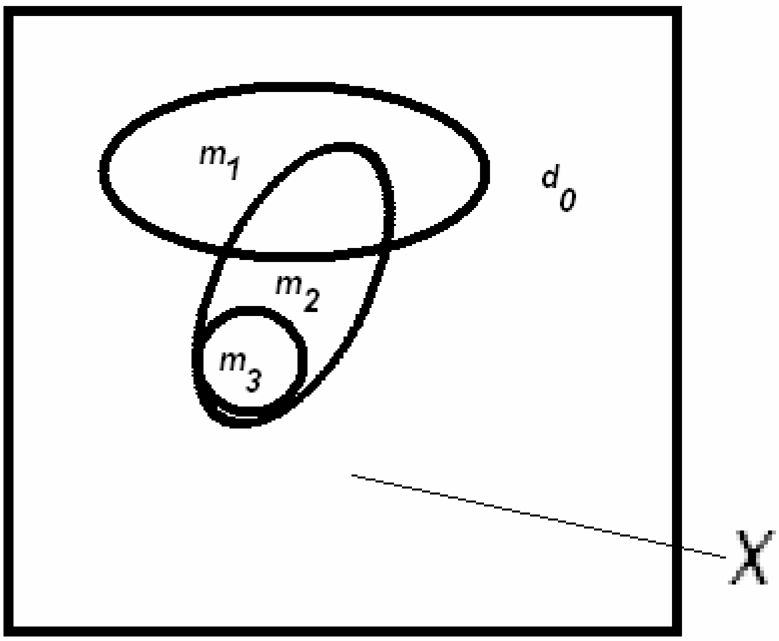
Тогда $D = M$, $k = n$, $\mu = E$,

$$u = diag\{w(m_1), \dots, w(m_n)\}. \; u^{-1} = diag\left\{\frac{1}{w(m_1)}, \dots, \frac{1}{w(m_n)}\right\}$$

Формула обращения

$$g(x) = \sum_{i=1,\dots,n} \frac{hf(m_i)}{w(m_i)} \chi_{m_i}(x); \quad f = g + \xi g. \tag{5.15}$$


m1
d0
m2
m3
X


m1
d0
m2
m3
X

6. Общий случай конечной или счетной системы усреднений.

Определение. Базис дополнения назовём *наложенным* (обозначение $ap\,base$), если носитель каждой его функции лежит в некотором множестве усреднения.

Замечание 6.1. В наложенном базисе каждому множеству усреднения соответствует не более одной базисной функции.

Для построения базиса дополнения рассмотрим обобщённую ситуацию. Пусть задан линейный оператор H, который отображает одно линейное пространство счетной размерности L в другое линейное пространство L'. В пространстве L задан базис $\varphi_1,\ldots$. Надо построить базис $\varphi' = \varphi'_1,\ldots$ в подпространстве $L'' \subset L$, который отобразится в базис $H\varphi'$ полного образа $HL \subseteq L'$. Используя счётность базиса φ, можно применить метод, аналогичный методу ортогонализации Грамма-Шмидта. Для этого зададим в пространстве L' положительно определённое скалярное произведение. Оставшиеся после ортогонализации векторов $H\varphi_i$ векторы образуют базис $\psi = \psi_1,\ldots$ в образе HL. В качестве φ'_i возьмем прообразы ψ_i в базисе φ.

Для построения базиса дополнения достаточно применить эту процедуру к произвольному наложенному базису.